Eksamen i	FO010A Matematikk 1000
	Prøve-eksamen
Dato	21. mai 2010
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	6
Vedlegg	Formelark
Tillatte hjelpemidler	Ingen

Oppgave 1

Vi betrakter matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a-2 & -2 & a-2 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Løs likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når $a = -1$.

b) Avgjør for hvilke verdier av a likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har eksakt én løsning, uendelig mange løsninger og ingen løsninger. Skriv løsningene på parametrisk vektorform når det er uendelig mange løsninger.

c) Regn ut A^{-1} når $a = -1$. Bruk dette til å sjekke løsningen du fant i a).

Oppgave 2

a) Derivér funksjonene $f(x) = x\sqrt{1-2x}$ og $g(x) = \ln(e^x + \sin x)$.

b) En kurve er gitt ved likningen $x\,y^5 = \sqrt{x}\,y^2 + 2y$. Sjekk at punktet $(1, -1)$ ligger på kurven, og finn likningen til tangenten i dette punktet.

c) En beholder skal formes som en rett sylinder med åpen topp og gitt overflate F. Hvor stor må radius og høyde være (uttrykt ved F) for at volumet av beholderen skal bli størst mulig?

Oppgave 3

Er følgende vektorer lineært uavhengige? Hvis ikke, uttrykk én av vektorene som en lineærkombinasjon av de andre.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4

a) Løs integralene $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ og $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

b) Løs integralene $\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$ og $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

c) La F være flaten i første kvadrant avgrenset av y-aksen, linjen $y = 1$ og grafen til funksjonen $f(x) = \sin x$. Finn volumet av omdreiningslegemene som dannes når F roteres 360° om følgende akser:

   i) x-aksen

   ii) y-aksen

Oppgave 5

a) Er denne matrisen diagonaliserbar?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Finn i så fall en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Løs systemet av differensiallikninger

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6

a) Løs differensiallikningen $y' - 4xy = x,\ y(1) = 0$.

b) Løs differensiallikningen $y'' - 4y' + 3y = 6,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1$.

c) En kurve $y = f(x)$ har egenskapen at tangenten til kurven i punktet (x, y) treffer x-aksen i punktet $(x^2, 0)$. Vis at $y = f(x)$ tilfredstiller differensiallikningen

$$y'(x^2 - x) + y = 0$$

Finn deretter løsningen av differensiallikningen $y'(x^2 - x) + y = 0$ som tilfredstiller $y(2) = 2$.

FORMELSAMLING FOR MATEMATIKK 1000

A. Potenser og logaritmer

1. Derivasjon.

a) $(e^x)' = e^x$
b) $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
c) $(\ln x)' = 1/x$
d) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

2. Regneregler for potenser.

a) $a^p\, a^q = a^{p+q}$
b) $a^p/a^q = a^{p-q}$
c) $a^{-q} = 1/a^q$
d) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
e) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
f) $a^p\, b^p = (ab)^p$
g) $a^p/b^p = (a/b)^p$

3. Regneregler for logaritmer.

a) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
b) $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
c) $\ln(a^p) = p \cdot \ln a$
d) $\log_a(b) = \ln(b)/\ln(a)$

B. Trigonometri

1. Derivasjon.

a) $(\sin x)' = \cos x$
b) $(\cos x)' = -\sin x$
c) $(\tan x)' = 1/\cos^2 x = \tan^2 x + 1$
d) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

2. Noen eksakte verdier.

u	u	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
0	0°	0	1	0
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	–

3. Trigonometriske formler.

a) $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$
b) $\tan u = \sin u / \cos u$
c) $\sin(\pi - u) = \sin u$
d) $\cos(2\pi - u) = \cos u$
e) $\tan(u + \pi) = \tan u$
f) $\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$
g) $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$
h) $\tan(2u) = \dfrac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$
i) $\sin(u/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$
j) $\cos(u/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$
k) $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$
l) $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
m) $\tan(u \pm v) = \dfrac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v}$

4. Harmoniske svingninger.

a) Bølgefunksjon: $A \sin(\omega(x - \phi)) + c$
b) Periode: $T = 2\pi/\omega$

C. Geometri

1. Likninger.

a) Rett linje: $y - y_0 = k(x - x_0)$
b) Sirkel: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

2. Vektorer.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
b) $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
c) $(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$

3. Avstand mellom to punkter.

$$d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

D. Komplekse tall

1. Skrivemåte.

$$z = a + ib = r(\cos\phi + i \sin\phi) = re^{i\phi}$$

2. **Formler for polarform.**
   a) $r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2\, e^{i(\phi_1+\phi_2)}$
   b) $\dfrac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{i(\phi_1-\phi_2)}$
   c) $(re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}$

E. Derivasjon

1. **Derivasjonsregler.**
   a) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
   b) $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$
   c) $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

F. Grenseverdier

1. **L'Hospitals regel.**
   a) Når $f(a) = g(a) = 0$, så er

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

G. Kurvedrøfting

1. **Monotoniegenskaper.**
   a) Når $f'(x) > 0$ for $x \in (a, b)$, så er f strengt voksende i $[a, b]$
   b) Når $f'(x) < 0$ for $x \in (a, b)$, så er f strengt avtagende i $[a, b]$

H. Integraler

1. **Integrasjonsregler.**
   a) $\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$
   b) $\int f(u)u'\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$

2. **Noen ubestemte integraler.**
   a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$
   b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$
   c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+a)^{1-n}}{(1-n)} + C$

I. Anvendelser av integrasjon

1. **Volum av omdreiningslegeme.**
   a) Om x-aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$
   b) Om y-aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$

2. **Buelengde.**

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

3. **Gjennomsnitt.**

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

J. Numeriske formler

1. **Newtons metode.**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

K. Matriser

1. **Determinanter.**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. **Inverse matriser.**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. **Egenverdier og egenvektorer.**
   a) En egenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ for A med egenverdi λ er en løsning av

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

   b) Karakteristisk likning for A:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

4. **Diagonalisering.**

$$A = PDP^{-1}$$

5. **Cramers regel.**
   a) Når A er en invertibel matrise, så har $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsning gitt ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

   der $A_i(\mathbf{b})$ er matrisen vi får ved å bytte ut kolonne i i A med $\mathbf{b}$