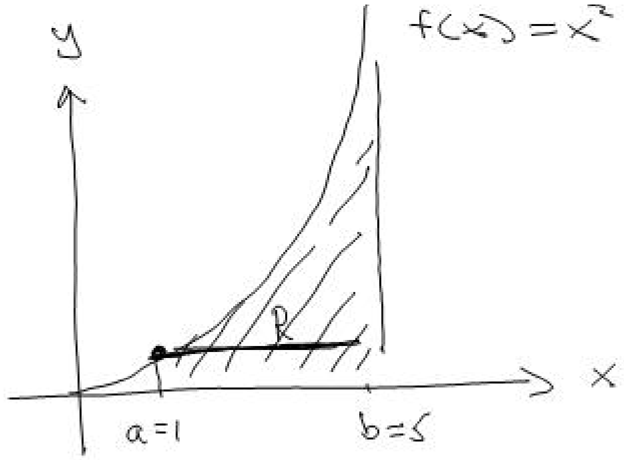
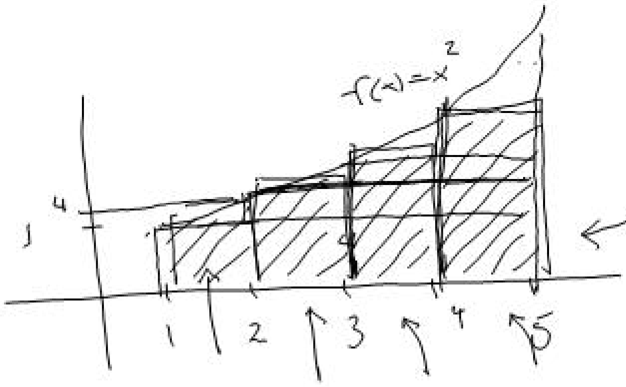
30/04/09: Areal beregning
Bestemt integral } kap. 16

Areal beregning:

Eks:



R: området begrenset av grafen til f, x-aksen, og linjene x=1 og x=5.



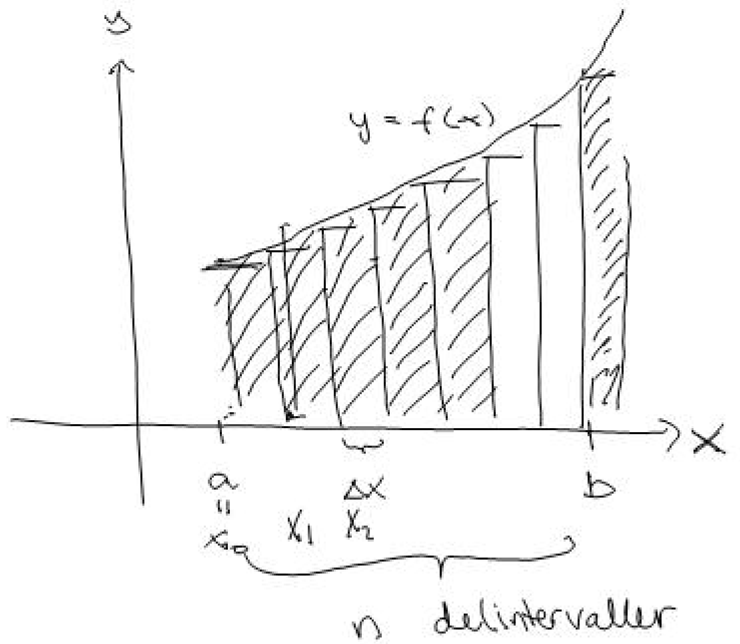
$1 \cdot 4 = 4$

$1 \cdot 1$	$1 \cdot 4$	$1 \cdot 9$	$1 \cdot 16$
$=1$	$=4$	$=9$	$=16$

} Skravert areal:

$1 + 4 + 9 + 16 = 30$

Anta at $f(x)$ definert på og kontinuerlig på et lukket intervall $[a,b]$ og slik at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a$$
$$x_1 = x_0 + \Delta x = a + \Delta x$$
$$x_2 = x_0 + 2\Delta x = a + 2\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = x_0 + (n-1)\Delta x = b - \Delta x$$
$$x_n = x_0 + n \cdot \Delta x = b$$

<u>Areal av skravert område:</u> (Riemann-sum)

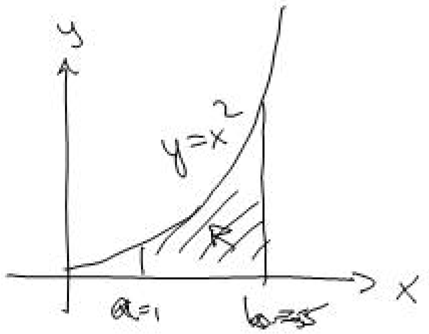
$$\Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(x_i)$$

Definisjon av areal:

Grenseverdien av Riemannsummen når $n \to \infty$.

Beregning av areal vha integral:



$f(x) = x^2$

$a = 1$

$b = 5$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^5 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_1^5$$

bestemt integral med grenser 1 og 5

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 5^3 + C\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + C\right)$$

$$= \frac{125}{3} + \cancel{C} - \frac{1}{3} - \cancel{C}$$

$$= \frac{124}{3} = 41 + 1/3 \simeq \underline{\underline{41.33}}$$

Arealet av R er $\underline{\underline{41.33}}$.

Bestemt integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

når $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

Eks:
$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \left[\sin x + C\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \left(\sin(\pi/2) \cancel{+C}\right) - \left(\sin(0) \cancel{+C}\right) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\int_0^{\ln 3} x \cdot e^x\,dx = \ ?$$

Alt I:

$$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & v = x \\ u' = e^x & v' = 1 \end{array}}$$

$$\int_0^{\ln 3} x e^x\,dx = \left[xe^x - e^x\right]_0^{\ln 3} = \left(\ln 3 \cdot e^{\ln 3} - e^{\ln 3}\right) - \left(0 \cdot e^0 - e^0\right)$$
$$= \ln 3 \cdot 3 - 3 + 1 = \underline{\underline{3\ln 3 - 2}}$$

Alt. 2:

$$\int_0^{\ln 3} x e^x = \left[x e^x\right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} e^x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & v = x \\ u' = e^x & v' = 1 \end{array}}$$

$$= \left(\ln 3 \cdot e^{\ln 3} - 0 \cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^{\ln 3}$$

$$= \ln 3 \cdot 3 - \left(e^{\ln 3} - e^0\right)$$

$$= 3\ln 3 - 3 + 1$$

$$= \underline{\underline{3\ln 3 - 2}}$$

Eks:

$$\int_2^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \int_5^{26} \frac{\cancel{2x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\cancel{2x}} = \int_5^{26} \frac{1}{\sqrt{u}} \, du$$

$u^{-1/2}$

$u = x^2 + 1$ $\quad$ $x = 2$ $\quad$ $u = u(2) = 5$

$du = 2x\,dx$ $\quad$ $x = 5$ $\quad$ $u = u(5) = 26$

$$\int u^{-1/2} du = \frac{1}{1/2} \cdot u^{1/2} + C = 2\sqrt{u} + C$$

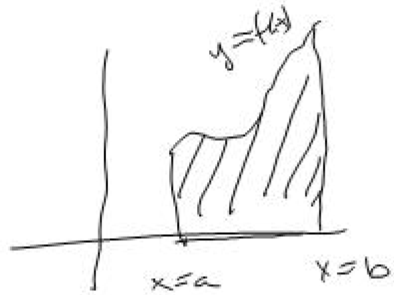
$$= \left[2\sqrt{u}\right]_5^{26} = \underline{\underline{2\sqrt{26} - 2\sqrt{5}}}$$

Arealberegning

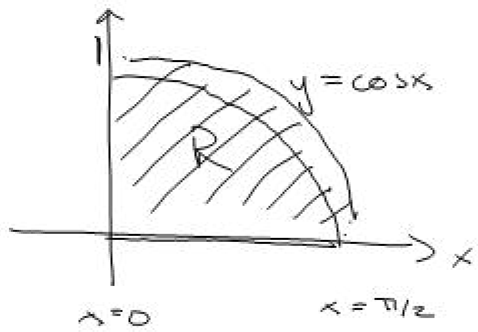
Hvis $f(x) \geq 0$ for $x \in [a,b]$ og kont.

så er arealet begrenset av grafen til f, x-aksen, $x=a$ og $x=b$ gitt ved

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$



Eks:



R: området begrenset av grafen til f, x-aksen og y-aksen $(x=0)$, og $x=\pi/2$.

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$