

24/04/09:

Separable differential equations

(Eset ark / kap. 15.9)

Diff. likning = Differensiallikning

Ek: $y' = 4y$

Løsning: En funksjon $y = f(x)$ som passer i likningen.

Ek: $y = 12e^{4x}$ er en løsning.

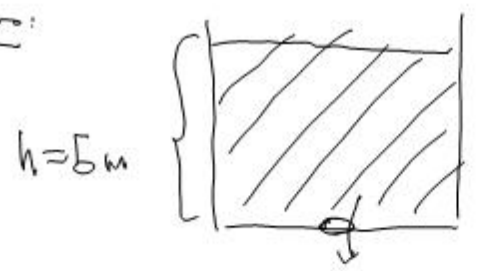
Sjekk: $VS = (12e^{4x})' = 12 \cdot e^{4x} \cdot 4 = 48e^{4x}$
 $HS = 4 \cdot 12e^{4x} = 48e^{4x}$

Definisjon: En likning som inneholder en funksjon $y = f(x)$ og dens deriverte.

Ex: Newton's law

$$F = m \cdot a$$

Ex:



Torricelli's law:

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$V' = -v \cdot a = -a \cdot \sqrt{2gh}$$

$$V = 16 \cdot h \Rightarrow (V)' = (16h)'$$

$$V' = 16 \cdot h'$$

Sylinder forrest tank
fylt med vann.

Grunnflate: kvadrat med
side 4m .

Vannet renner ut av tanken
gjennom et lite hull med
areal a .

Hvor lang tid tar det
for tanken tømmes?

$V(t)$ = volumet i tanken
ved tiden t .

$$V(0) = 16\text{m}^2 \cdot 5\text{m} = 80\text{m}^3$$

$$V'(t) = -a \sqrt{2gh}$$

$$16 \cdot h' = -a \sqrt{2gh}$$

$$h' = -\frac{a \cdot \sqrt{2gh}}{16}$$

Anta at $h(20) = 4$,
dvs at høyden er 4m
etter 20 min . Denne
tilleggsbetingelsen gjør
at vi kan finne a .

Løsning av differensialligninger

Separabel

kan separeres

Ekse: $y' = 4y \quad | :y$

$$\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y' = 4$$



Separert form

$$g(y) \cdot y' = h(x)$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int 4 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 4x + C_1$$

Som substitusjon:

$$dy = y \cdot dx$$

$$\boxed{\ln|y| = 4x + C_1}$$

| bruker e^x

$$|y| = e^{4x + C_1}$$

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{4x}$$

$$y = \pm e^C e^{4x}$$

$$y = C_2 \cdot e^{4x}$$

$$\boxed{y = C e^{4x}}$$

Sjekk:

$$\left. \begin{array}{l} \text{VS: } y' = (C \cdot e^{4x})' = C \cdot e^{4x} \cdot 4 \\ \text{HS: } 4y = 4 \cdot C e^{4x} \end{array} \right\} \underline{\underline{\text{ok}}}$$

Separation:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \cdot y' = 4$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 4 \quad | \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} dy = 4 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 4 dx$$

Leibniz
Schreibweise:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Start verdi = ~~init~~ init verdi

$$y' = 4y$$
$$y(0) = 2$$

↑

Start verdi:

$$y = C \cdot e^{4x}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$2 = C \cdot e^{4 \cdot 0}$$

$$2 = C \cdot 1$$

$$\underline{\underline{C = 2}}$$

$$\underline{\underline{y = 2 \cdot e^{4x}}}$$

Formel:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$