26/03/09:

Integrasjon (kap. 15 - 16)

Antiderivasjon:

Problem: Gitt en funksjon $f(x)$, finn alle funksjoner $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.
$F(x)$ kalles antiderivert til $f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + C$ (C konstant)

Hvorfor blir det "+ C"

$C' = 0$
$F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C$

fordi hvis $F'(x) = 0$ for alle x, så er ~~tangenten~~ til $y = F(x)$ horisontal overalt, og dermed er funksjonen konstant.

Eks: $f(x) = x^2$
$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$

$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 = x^2$

C betyr en hvilken som helst konstant

Skrivemåte: Ubestemt integral

$$\int \underbrace{f(x)}\, dx = \underbrace{F(x) + C}_{\text{de antideriverte til } f(x)}$$

integrasjonstegn

x er variabelnavnet

C kalles integrasjonskonstanten

integrand = funksjonen som vi skal antiderivere

Eks:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Eks:

$$\int (1 + x + x^2 + x^3)\, dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

Regneregler for integrasjon

1. $$\int (u \pm v)\, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$$

2. $$\int c \cdot u \, dx = c \cdot \int u \, dx$$

u og v er uttrykk i x

c er en konstant

Eks:

$$\int (2x+4)\,dx = \underline{x^2 + 4x + C}$$

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$
$$\int 4\,dx = 4x + C$$

Eks:

$$\int 17 \cdot x^3\,dx = 17 \int x^3\,dx$$
$$= 17 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C = \underline{\frac{17}{4}x^4 + C}$$

Integrasjon av polynomer

③ $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$$

Eks:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$
$$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

$$\int (1 + x + 2x^2)\,dx = x + \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$$
$$= \underline{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + C}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} + C = \underline{-\frac{1}{x} + C}$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C = \underline{\frac{2}{3}x^{3/2} + C}$$

$$= \underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \cancel{\frac{1}{0}x^{0}} \qquad \ln x + C$$

Integrasjon av trigonometriske funksjoner

(4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(6) $\int (\tan^2 x + 1)\, dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C$

Eks: $\int (\sin x - \cos x)\, dx = \underline{-\cos x - \sin x + C}$

Integrasjon av eksponensial- og logaritmefunk.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

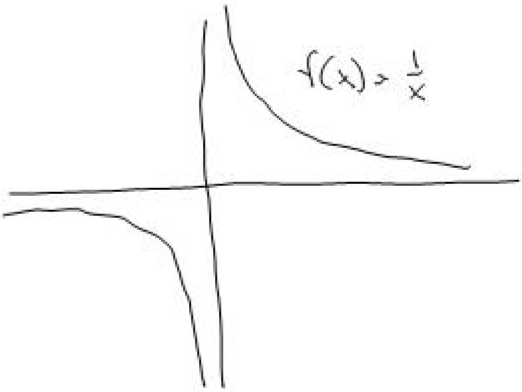
(7) $\int e^x \, dx = e^x + C$

$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

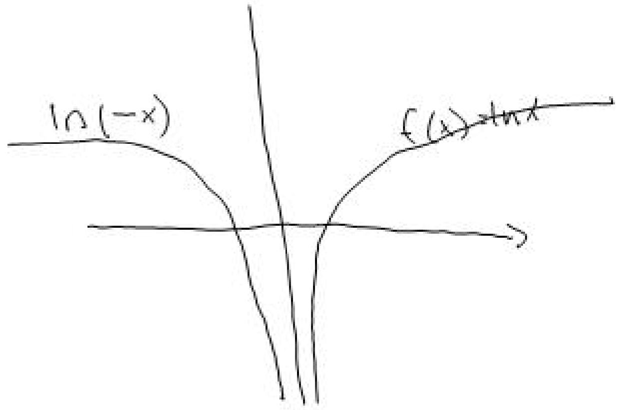
(8) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$

Integralet $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$



$F(x) = \ln(x)$, $x > 0$



$$\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \left\{\begin{matrix} \ln(x) , & x > 0 \\ \ln(-x) , & x < 0 \end{matrix}\right\} = \ln|x|$$

$\ln(10) = \ln(10)$

$\ln(-10) = \ln(10)$

$\ln|10| = \ln 10$

$\ln|-10| = \ln 10$

Konklusjon: $\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$