12/03/2007

Logaritmer
Eksponensialfunksjoner } kap. 11.1-11.7

Repetisjon.

- Regler for potensregning

$$\left.\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^m / a^n &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \end{aligned}\right\} \quad a > 0$$

- Prosentregning:

* en funksjon $f(t)$ vokser med r % per tidsenhet.

$$f(t+1) = f(t) + f(t) \cdot \frac{r}{100}$$
$$= f(t) \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

vekstrate

* eks. $r = 5\% \rightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1.05$
$r = -7\% \rightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 0.93$

Eks:

	År 1	År 2
Bank:	5 %	5 %
Fond 1:	40 %	-30%
" 2:	-30%	40%

$1.05 \cdot 1.05 = 1.1025$
$1.40 \cdot 0.70 = 0.98$
$0.70 \cdot 1.40 = 0.98$

Eksponensial funksjon:

Eksponensial funksjon med grunntall $a > 0$:

$$f(x) = a^x$$

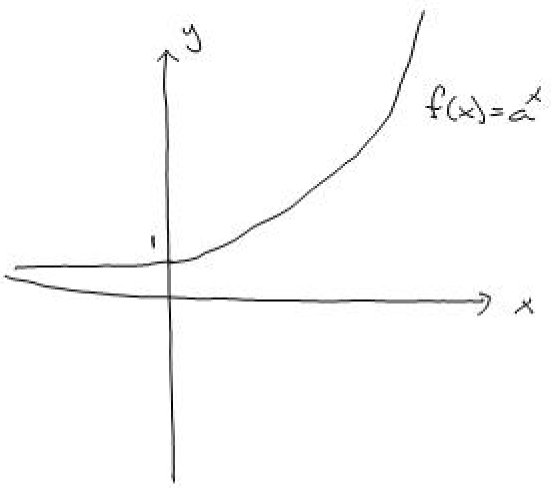
Vi kan tenke på $a = 1 + \frac{r}{100}$ som en vekst faktor.

Eks: $a = 1.10 \rightsquigarrow r = 10\%$ vekst

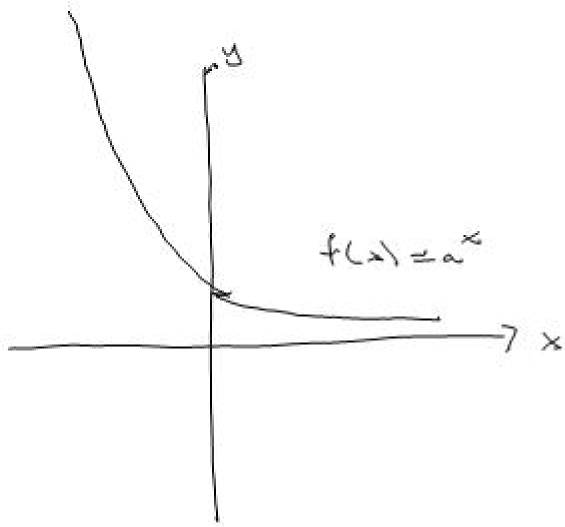
$$f(x+1) = f(x) \cdot 1.10$$
$$= f(x) + f(x) \cdot \frac{10}{100}$$

$a = 3 \rightsquigarrow r = 200\%$

$a = 0.7 \rightsquigarrow r = -30\%$



$a > 1 \quad (r > 0)$



$0 < a < 1 \quad (r < 0)$

Derivasjon av $y = f(x) = a^x$, $a > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

a = 2:

$$f(x) = 2^x$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \simeq \underline{0.69 \cdot 2^x}$$

a = 3:

$$f(x) = 3^x$$

$$f'(x) = 3^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \simeq \underline{1.10 \cdot 3^x}$$

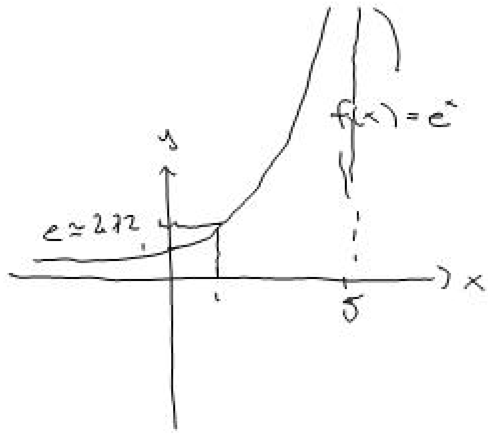
Euler-tallet e

Defn: $a = e \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2.72$$

$$e = \boxed{2.718281828459045\ldots}$$

En viktig funksjon:



$$f(x) = e^x$$

$$f(1) = e^1 = e \simeq 2.72$$

$$f(5) = e^5 \simeq 2.72^5 \simeq 148.4$$

Viktig: $\boxed{(e^x)' = e^x}$

$$a = \boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$$

$$h = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(1+h)^{1/h}\right]^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{1}+h) - \cancel{1}}{h} = 1$$

Logaritmer:

$\log_a(x)$ = den omvendte funksjonen til a^x

= det tallet vi må opphøye a i for å få x

= den verdien av y som løser likningen $a^y = x$.

Eks:

$$\log_2(4) = 2$$
$$\log_2(8) = 3$$

$x^2 = 100$	$2^x = 16$
$x = \pm\sqrt{100}$	$\log_2(2^x) = \log_2(16)$
$x = \pm 10$	$\underline{\underline{x = 4}}$

Hvordan regne ut $\log_2(3)$?

$$\left.\begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \end{array}\right\} \quad \log_2(3) \in (1,2)$$

To logaritmer på kalkulator:

$\ln(x) = \log_e(x)$ – naturlig logaritme, grunntall $= e$

$\lg(x) = \log(x) = \log_{10}(x)$ – Briggsk logaritme, grunntall $= 10$.

Regneregler for logaritmer:

$$(1) \quad \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(2) \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$(3) \quad \ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

også riktig for $\log_a$

$$(4) \quad \log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Eks: $\log_2(3) = \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.58$

Eks: Løs likningen $2^x = 3$

$$2^x = 3$$

~~Alt log~~

$$\log_2(2^x) = \log_2(3)$$

$$x = \log_2(3) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

$$x \simeq 1.58$$

$$2^x = 3$$

$$\ln(2^x) = \ln(3)$$

$$\frac{x \cdot \cancel{\ln(2)}}{\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

$$x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq 1.58$$