Derivasjon (kjerneregelen) (kap. 8.8)

Eks:

$$f(x) = (x+1)^8$$
$$f'(x) = 8\cdot(x+1)^7\cdot(x+1)'$$
$$= 8\cdot(x+1)^7\cdot 1$$
$$= \underline{\underline{8(x+1)^7}}$$

$u = x+1$

$u' = 1$

$g(x) = x^8$

$g'(x) = 8x^7$

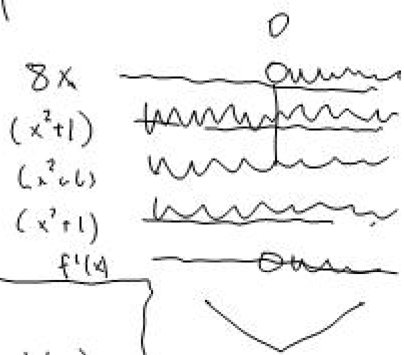
$$f(x) = (x^2+1)^4$$
$$f'(x) = 4\cdot(x^2+1)^3\cdot(x^2+1)'$$
$$= 4\cdot(x^2+1)^3\cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{8x\cdot(x^2+1)^3}}$$

$u = x^2+1$

$u' = 2x$

$g(x) = x^4$

$g'(x) = 4x^3$



Kjerneregel: $\boxed{\left(f(u(x))\right)' = f'(u)\cdot u'(x)}$

Eks: $f(x) = (x+1)^8$

$$\begin{cases} (u^8)' = 8u^7 \\ u' = 1 \end{cases}$$

$u' = (x+1)'$

Eks:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+1} + 4$$

$$f'(x) = \left(x \cdot \sqrt{x^2+1} + 4\right)'$$

$$= \left(x \cdot \sqrt{x^2+1}\right)' + 0$$

$$= (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$= 1 \cdot \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} + x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Produktregel:

$u = x \qquad v = \sqrt{x^2+1}$

$u' = 1 \qquad v' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Kjerneregel:

$w = x^2+1$

$w' = 2x$

Om bevis for regnereglene

Produktregelen:

$$f(x) = u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(u(x+h) - u(x)\right) \cdot v(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{u(x) \cdot \left(v(x+h) - v(x\ldots\right.}{h}$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\underline{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Skrivemåte: Leibniz' skrivemåte for derivasjon

$$f'(x) = y' = (f(x))'$$

Leibniz: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)$

Skrivemåte for kjerneregelen: $\boxed{\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}}$

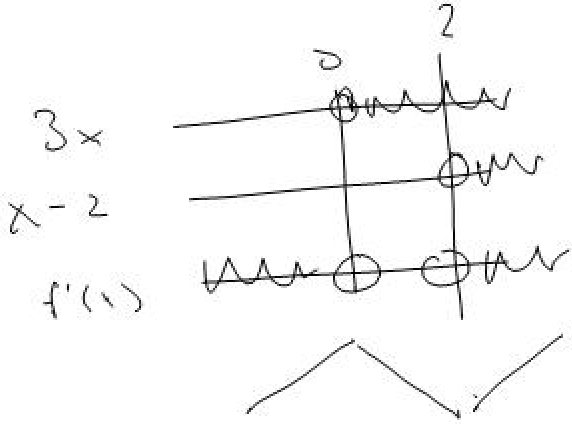
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lokale topp/bunnpkt. (andrederivert-testen)

Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$= 3x(x-2)$$



x=0: lokalt topp-pkt

x=2: lokalt bunnpkt

Alt: Andrederivert-testen

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

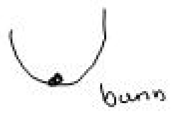
Stasjonære pkt: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$x = 0$ eller $x = 2$

Andrederivert:

$f''(x) = 6x - 6$ $\quad f''(0) = -6 < 0 \quad f''(2) = 6$



Andrederivert-testen:

(1) Finn alle stasjonære pkt,
dvs løser likningen $f'(x) = 0$.

(2) Regn ut $f''(a)$ for alle de stasjonære
pktene $x = a$ fra (1).

Konklusjon:

- $f''(a) < 0$: $\cap$ — $x = a$: lokalt topp-pkt.
- $f''(a) > 0$: $\cup$ — $x = a$: lokalt bunnpkt.
- $f''(a) = 0$: ingen konklusjon

Største og minste funksjonsverdi (kap. 8.6)

Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $D_f = [0, 20]$

Finn største og minste funksjonsverdi.

① Lokale topp og bunnpkt.

lokalt topp-pkt: $x = 0$ $y = 2$

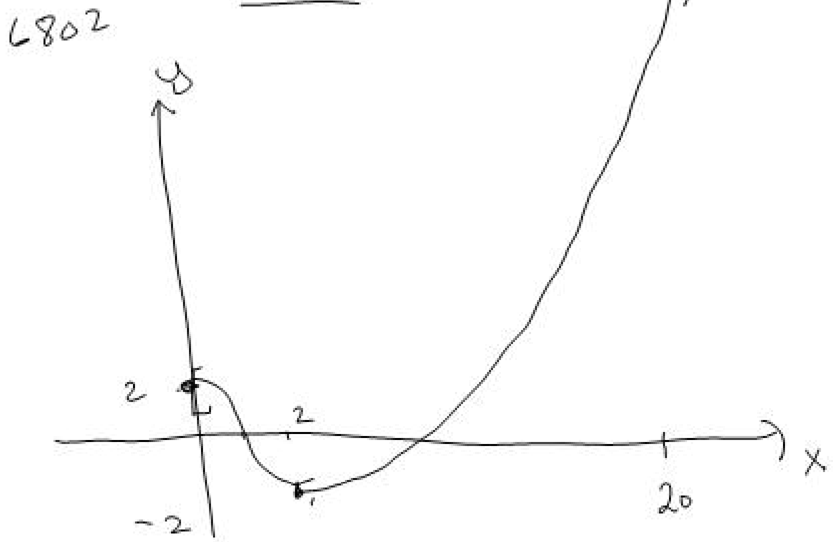
lokalt bunn pkt: $x = 2$ $y = -2$

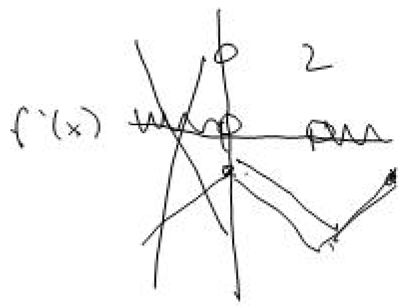
② Randpkt.

$D_f = [0, 20]$

$x = 0$ $y = 2$

$x = 20$ $y = 20^3 - 3 \cdot 20^2 + 2 = 6802$





Sammenligner y-verdiene

i $\begin{cases} \text{lokale topp/bunnpkt} \\ \text{randpkt.} \end{cases}$

$x = 0 \quad y = 2$

$x = 2 \quad y = -2$

$x = 20 \quad y = 6802$

Konklusjon: Størst verdi: $y = 6802$ for $x = 20$

Minste verdi: $y = -2$ for $x = 2$

Hvis f(x) er kontinuerlig og D_f er lukket og begrenset, så har f en største og en minste verdi, og vi kan finne disse ved metoden ovenfor.

D_f lukket og begrenset:

* $D_f = [a, b]$ a, b er tall (ikke $\pm\infty$)
  da er D_f lukket og begrenset.

* begrenset: ikke $\pm\infty$
  lukket: randpunktene er med i D_f.