Derivasjon: I funksjonsdrøfting { kap. 8.4 – 8.7

- når f(x) er voksende / avtagende
- lokale topp- / bunnpkt

} fortegnsskjema for f'(x).

- når f(x) er konkav / konveks
- vendepkt

} fortegnsskjema for f''(x)

- likningen til tangenter og vendetangenter.

Høyere orden deriverte:

$f''(x) = (f'(x))'$ andrederivert

$f'''(x) = ((f'(x))')'$ tredjederivert

$\vdots$

etc.

Eks:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

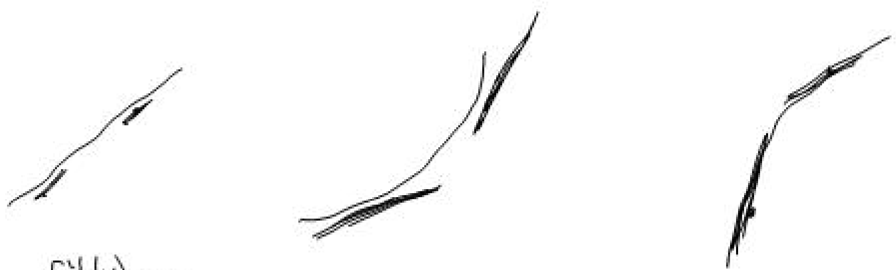
Hva forteller $f''(x)$ oss om $f(x)$?

$f'(x)$ gir veksten/endringen i $f(x)$

$f''(x)$ gir endringen i $f'(x)$

= endringen i veksten.

Eks: $f'(x) > 0$



$f''(x) = 0$ $\quad$ $f''(x) > 0$ $\quad$ $f''(x) < 0$

Konkav / konveks:

$f(x)$ er <u>konkav</u> hvis $f''(x) \leq 0$

$f(x)$ er <u>konveks</u> hvis $f''(x) \geq 0$

konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frown$ den hule siden vender ned

konveks $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\smile$ den hule siden vender opp

Vendepkt:

Et punkt der $f''(x)$ skifter fortegn kalles et <u>vendepkt</u>.

Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = \underline{6x - 6}$

Fortegnsskjema for $f''(x)$:

		1	
$6x-6$	$-$	0	$+$
	$\frown$		$\smile$

f er konkav: $x \leq 1$

f er konveks: $x \geq 1$

vendepkt: $x = 1 \longrightarrow \underline{\underline{(1, 0)}}$

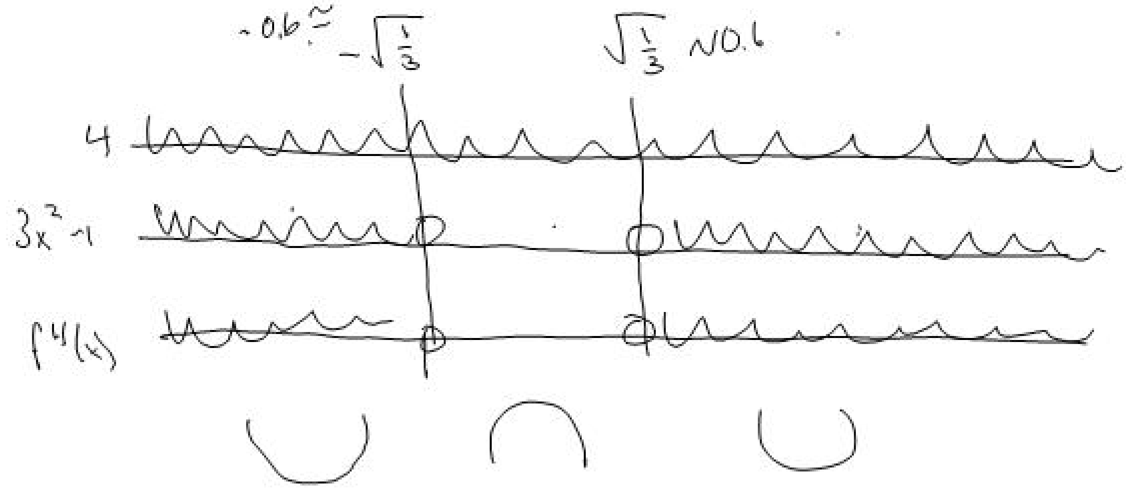
Eg:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

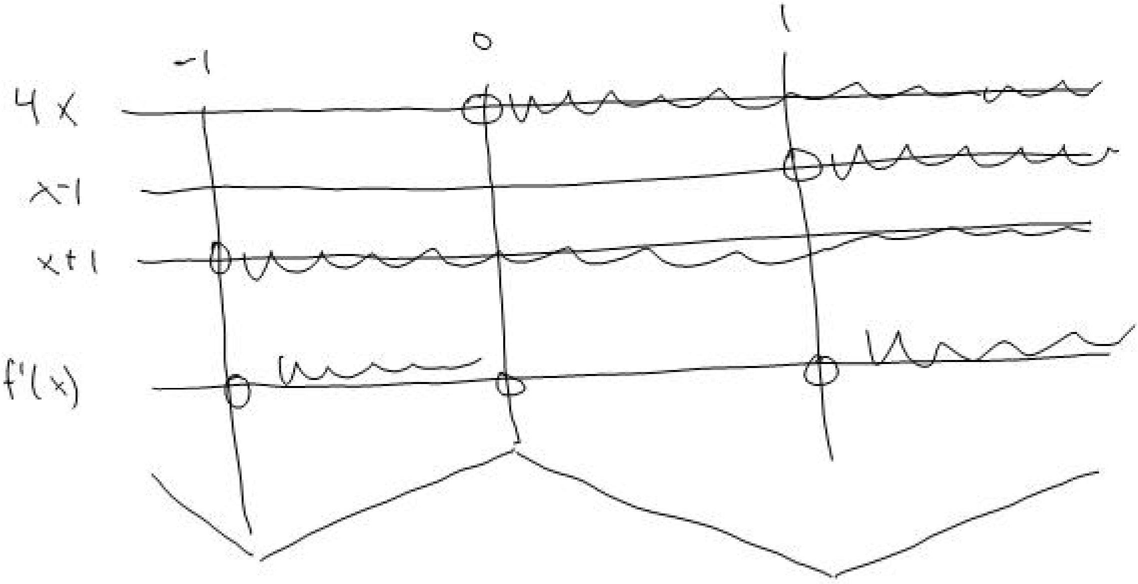
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 3x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1/3 \\ x &= \pm\sqrt{1/3} \\ &\sim \pm 0.6 \end{aligned}}$$



$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$



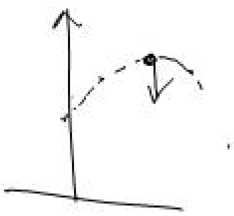
Eksempel fra fysikk (kap. 8.7)

$s(t)$: posisjon som funksjon av tiden

$s'(t) = v(t)$ fart

$s''(t) = \underline{\underline{a(t)}} = v'(t)$ akselerasjon

Eks:



$a = -g$

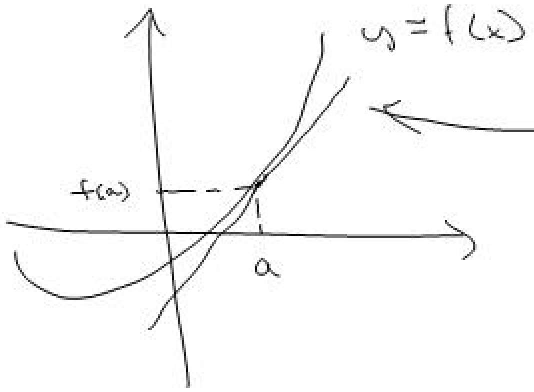
$= -9.81 \, m/s^2$

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0 \\ v(t) &= -gt + v_0 \\ a(t) &= -g \end{aligned}}$$

$v'(t) = a(t) = -g$

$s'(t) = -gt + v_0$ $\qquad$ $s(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$

Tangenten til $f(x)$ i $x=a$:



tangenten til $y=f(x)$ i $x=a$:

- Rett linje
- Går gjennom $(a, f(a))$
- Stigningstall : $f'(a)$

Eks: $f(x) = x^3-3x^2+2$ $\qquad f'(x) = 3x^2-6x$

① Finn tangenten i $x=2$.

Likningen til tangenten:

$$\boxed{y - y_0 = k \cdot (x - x_0)}$$

$(x_0, y_0) = (2, -2)$

$k = f'(2) = 0$

$$y-(-2) = 0\,(x-2)$$

$$y+2 = 0$$

$$\underline{\underline{y = -2}}$$

② Finn vendetangenten til f.

$$\boxed{\text{Vendetangent} = \text{tangent i vendepunktet.}}$$

Eks (fts.) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Vendetangent:

regning ✓

Vendepkt for f: $\underline{x = 1}$

$$\boxed{y - y_0 = k \cdot (x - x_0)}$$

$x_0 = 1$

$y_0 = f(1) = 0$

$k = f'(1) = -3$

$$y - 0 = -3(x - 1)$$

$$\underline{\underline{y = -3x + 3}}$$

Punkter der $f'(x)$ og/eller $f''(x)$ ikke er definert:

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$x = 0$ er med i D_f

$f'(0) = \infty$ (ikke definert)

0

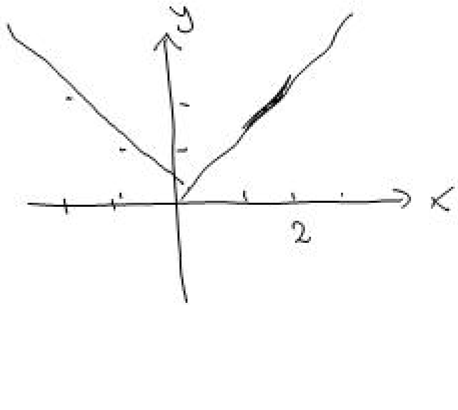
$f'(x)$

Husk: **Vendepkt** = punkt (i defn. mengden) der $f''(x)$ skifter fortegn.

lokalt bunnpkt = punkt (i defn. mengden) der $f'(x)$ skifter fortegn fra $\div$ til $+$.

lokalt topp-punkt = punkt (i defn. mengden) der $f'(x)$ skifter fortegn fra $+$ til $\div$

Ek: $f(x) = ||x|| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



$f'(x) = 1, \quad x > 0$

$f'(x) = -1, \quad x < 0$

$f'(0) = ?$

$f'(x)$