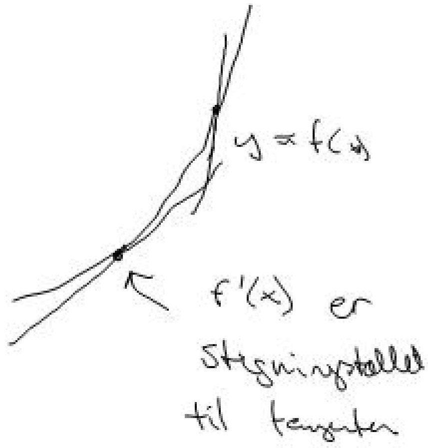
Bruk av derivasjon i funksjonsdrøfting

(kap. 8.4 - 8.6)

Repetisjon:

- må kunne regne ut den deriverte
- husk at den deriverte er veksthastighet



Funksjonsdrøfting:

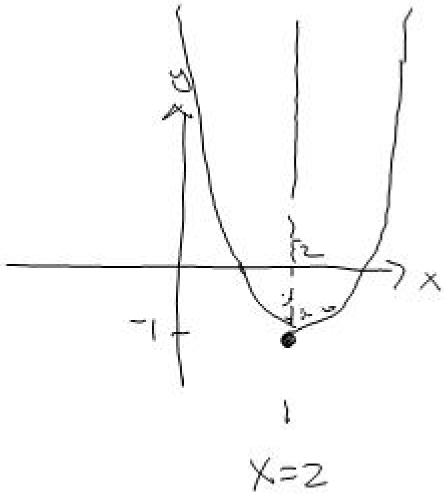
Gitt en funksjon f(x)

- nullpunkt / skjæringspunkt med aksene
- asymptoter
- ⋮

Skal se på:

* monotoniegenskaper — når f vokser og når f avtar
* topp / bunnpunkt

Monotoniegenskaper:



Eks: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$= x^2 - 4x + 4 - 1$

$= (x-2)^2 - 1$

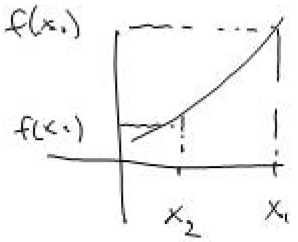
Monotoniegenskaper:

f vokser når $x \geq 2$ / $x \in [2, \infty)$

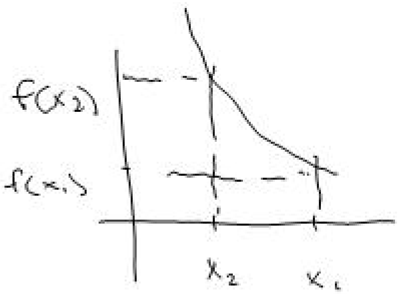
f avtar når $x \leq 2$ / $x \in (-\infty, 2]$

Def: f vokser: når $x_1 > x_2$, så er $f(x_1) > f(x_2)$

f avtar: når $x_1 > x_2$, så er $f(x_1) < f(x_2)$



vokser



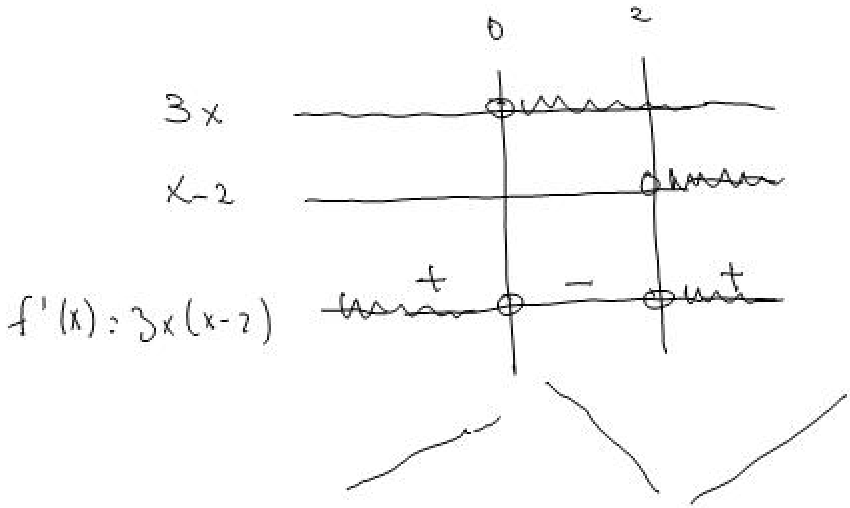
avtar

Eks. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Metode:
Vi finner monotoniegenskapene til $f(x)$ ved å sette opp fortegnsskjema for $f'(x)$, og leser av når f vokser/avtar.

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 3\cdot 2x + 0$$

$$= 3x^2 - 6x = \underline{3x(x-2)}$$



$(x \in (-\infty, 0])$ $(x \in [2, \infty))$

f vokser når $x \le 0$ og når $x \ge 2$

f avtar når $0 \le x \le 2$

$(x \in [0, 2])$

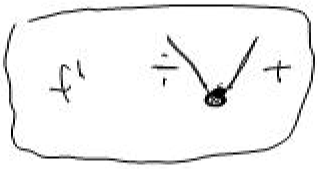
f	vokser	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$
f	avtar	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$

Lokale topp / bunnpunkt:

Et stasjonært punkt er et punkt der $f'(x) = 0$.
Vi finner stasjonære punkt ved å løse likningen
$f'(x) = 0$.

Det fins tre typer av stasjonære punkter:

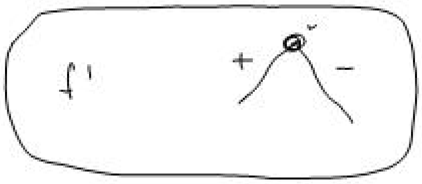
(1) Lokale bunnpunkt:



Defn: Et punkt som har minst funksjons verdi blant punktene i nærheten.

f' skifter fortegn fra ÷ til +.

(2) Lokale topp-punkt:

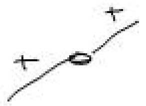


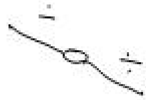
Defn: Et punkt som har størst funksjonsverdi blant punktene i nærheten.

f' skifter fortegn fra + til −

(3) Sadelpunkt / terassepunkt

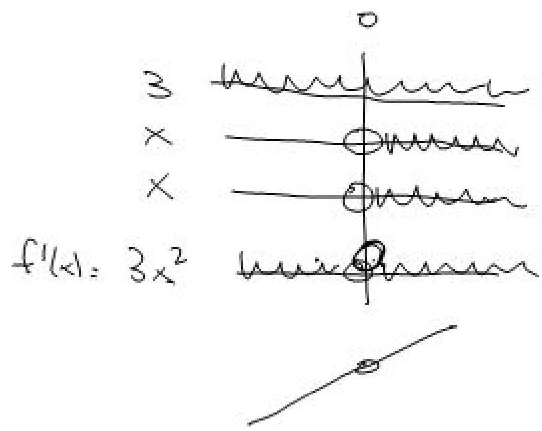
Skjer når:

f' 

f' 

Eks: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$



Metode for å finne lokale topp / bunnpkt.

Vi setter opp fortegnsskjema for $f'(x)$, og leser av

f'  : lokalt { topp-punkt / maksimumspkt }

f'  : lokalt { bunnpkt / minimumspkt }

} lokalt ekstremalpunkt

Eks: $f(x) = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = (x-3)\cdot\sqrt{x}$, $\underline{x \geq 0}$

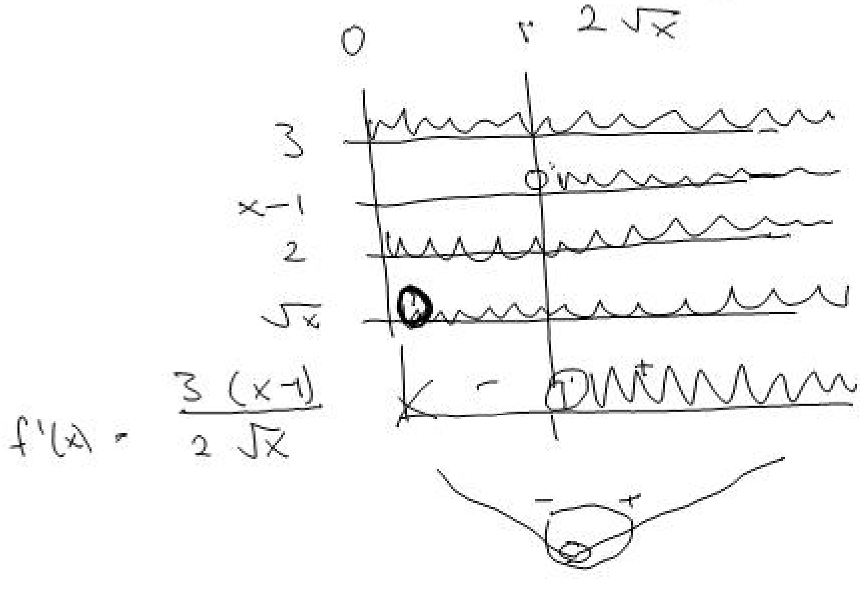
① Finn når f er voksende og avtagende

② Finn evt. lokale topp- og bunnpkt.

<u>Fortegnsskjema for $f'(x)$:</u>

$$f'(x) = \left(x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\right)'$$
$$= \left(x \cdot x^{1/2} - 3 \cdot x^{1/2}\right)'$$
$$= \left(x^{3/2} - 3x^{1/2}\right)'$$
$$= \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{x^{1} \cdot x^{1/2} = x^{1+1/2}}$$



① f voksende: $x \geq 1$

f avtagende: $0 \leq x \leq 1$

② Lokalt bunnpkt i $x = 1$:

$\underline{\underline{(1, -2)}}$