Grafisk løsning. (Kap 3.7, 4.2)

Tilfelle 1: Likning med en ukjent

$$f(x) = g(x)$$

Ek: $x^2 - 2x + 4 = x + 7$

Metode:

- Vi innfører hjelpevariabel y og tegner $y = f(x)$ og $y = g(x)$ i samme koordinatsystem.

- Skjæringspunktene mellom $y = f(x)$ og $y = g(x)$ er løsningene.

Vi leser av løsningene $\underline{x \simeq -0.79}$ og $\underline{x \simeq 3.79}$

Eks: $x^3 - x + 1 = 0$

Tegner inn $y = x^3 - x + 1$ og

$y = 0$ (x-aksen).

Leser av $x \simeq \underline{\underline{-1.32}}$.

$$f(x) = g(x)$$

Eks:

$$x^5 + x - 1 = x^3 - x^2 + 4$$

$$x \simeq \underline{\underline{1.34}}.$$

Alternativ: $x^5 - x^3 + x^2 + x - 5 = 0$

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$x \simeq \underline{\underline{1.34}}$$

Tilfelle 2: Ulikhet i en ukjent

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \quad > \quad g(x)$$

Eks:

$$\underbrace{x^5 - x + 1}_{y_f} > \underbrace{x^3 - x^2 + 4}_{y_g}$$

- Tegner $y = f(x)$ og $y = g(x)$.
- Leser av løsningene:

$$\underline{\underline{x > 1.39}}$$

$$x^5 - x + 1 > x^3 - x^2 + 4$$

$$x^5 - x^3 + x^2 - x - 3 > 0$$

$$\underline{x > 1.39}$$

Tilfelle 3: to likninger med to ukjente

Eks:

$$x + y = 4 \qquad y = 4 - x$$
$$x - y = 2 \qquad y = x - 2$$

Leser av: $\underline{\underline{x = 3,\ y = 1}}$

Eks:

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad y^2 = 9 - x^2 \qquad \underline{y = \pm\sqrt{9 - x^2}}$$
$$x - y = 1 \qquad \underline{y = x - 1}$$

$(x,y) = \underline{\underline{(2.56, 1.56)}}$ eller $(x,y) = \underline{\underline{(-1.56, -2.56)}}$

Eks:

$$x^2 + y = 7 \qquad y = 7 - x^2$$
$$x + y = 1 \qquad y = 1 - x$$

Leser av: $\underline{\underline{x = 3,\ y = -2}}$ og $\underline{\underline{x = -2,\ y = 3}}$

$\underline{(x,y) = (3,-2)}$ eller $\underline{(x,y) = (-2,3)}$

Grenseverdier
Asymptoter

} kap. 7

Eks: $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x \neq -2$

Hva skjer med $f(x)$ når $x \neq -2$ men nært -2?

x	-1.9	-1.99	-1.999	-2.1	-2.01	-2.001
$f(x)$	10	100	1000	-10	-100	-1000
nevner:	0.1	0.01	0.001	-0.1	-0.01	-0.001

Konklusjon:

Når $x \to -2^+$ så vil $f(x) \to \infty$

(x går mot -2 på pluss-siden)

Når $x \to -2^-$ så vil $f(x) \to -\infty$

(x går mot -2 på minussiden)

$$\underbrace{\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} = \pm\infty}$$

Grenseverdier:

$$\boxed{\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty \qquad \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty}$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} = \pm\infty$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0 \qquad (x \text{ radianer})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

x	0.01	-0.01
$f(x)$	0.999	0.999

<u>Polynomer</u>:

Et polynom av grad n er en funksjon

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

der $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ er tall.

<u>Eks</u>:

$2x^2 + 7x - 1$ grad 2

$x^7 - 1$ grad 7

$\sqrt{x}$, $\sin x$, $\frac{x}{x-1}$ ikke polynom.

$\sqrt{2} \cdot x - 1$ polynom av grad 1

Rasjonale funksjoner:

$$f(x) = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$$

Eks: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+7}$$

$$f(x) = x^2+7x+1 = \frac{x^2+7x+1}{1}$$

Fakta: Rasjonale funksjoner

(*) Defn.mengden til en rasjonal funksjon

= alle x-verdier bortsett fra nullpkt. til nevner

Eks: $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-7}$, $x \neq 7$

$f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2}$, $x \neq 1, 2$

$$\left(\begin{array}{c} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \underline{x=1} \text{ eller } \underline{x=2} \end{array} \right)$$

(*) Rasjonale funksjoner er <u>kontinuerlige</u>.

Eks: $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $x \neq -2$ rasjonal

$\underline{x = 3}$: $\begin{cases} f(3) = 3/5 = 0.6 \\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0.6 \end{cases}$

"ingen hopp i $x = 3$"

<u>f(x) er kontinuerlig i x=3</u>

Defn: $f(x)$ er <u>kontinuerlig</u> i $x = a$
hvis $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

$f(x)$ er <u>kontinuerlig</u> hvis den er kontinuerlig i alle pkt. i definisjonsområde.

Eks: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ 1 - x & , x < 0 \end{cases}$

Alle "vanlige" funksjoner er kontinuerlige.

Grenseverdier for rasjonale funksjoner

Metode 1: Innsetting.

Eks:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x-1} = \frac{0+2}{0-1} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{hvis } \begin{cases} f \text{ er kontinuerlig} \\ i \quad x = a. \end{cases}$$

Metode 2:

$$\text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \text{"}\pm\infty\text{"}$$

Eks:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{1+2}{1-1} = \frac{3}{0}$$

$x = 1.01$: $\frac{3.01}{0.01} = \underline{301}$ $\qquad$ $x = 0.99$: $\frac{2.99}{-0.01} = \underline{-299}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{\text{nært } 3}{\text{nært } 0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = \underline{\underline{\pm\infty}}$$