

23/04/09. Separable diff. ligninger

Differensial ligning : = diff. ligning

Eks:  $y' = 4y$

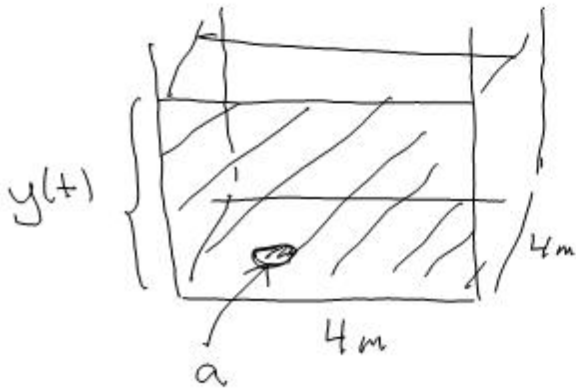
$y = e^{4x}$   
er en løsning

Løsning:  
En funksjon  $y = f(x)$   
Som passer i ligningen,  
dvs:  
 $f'(x) = 4 \cdot f(x)$

VS:  $y' = (e^{4x})' = e^{4x} \cdot 4 = 4e^{4x}$   
HS:  $4 \cdot y = 4 \cdot e^{4x}$

Altså: diff. ligning er en ligning der den ukjente er en funksjon og der de deriverte inngår.

Et eksempel:



Et kar har tverrsnitt som er et kvadrat med side 4m,  $A = 16m^2$ .

I bunnen av karet er et lite hull med areal  $a$ .

Torricellis lov.

$$y'(t) = - \frac{a \cdot \sqrt{2g}}{A} \cdot \sqrt{y}$$

Hvis karet er fylt med vann opp til et nivå på 5m, og vannstanden er redusert til 4m eller 20min, hvor lang tid tar det før karet er tømt?

$$y(0) = 5m$$

$$y(1/2) = 4m$$

Eks:

$$y' = 4y$$

Skal finne funksjoner  
 $y = y(x)$  som passer.

$$y' = 4y \quad | :y$$

separert  $\rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 4$

braker  $\rightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int 4 dx$   
 $\int \dots dx$

$$\int \frac{1}{y} \cdot \underbrace{y'}_{dy} dx = 4x + C$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 4x + C$$

$$\ln |y| = 4x + C$$

| braker  $e^x$

$$e^{\ln |y|} = e^{4x + C}$$

$$|y| = e^{4x + C} = e^{4x} \cdot e^C$$

$$y = e^{4x} \cdot C$$

$$\underline{\underline{y = C \cdot e^{4x}}}$$

En diff. likning er  
separabel betyr at  
den kan skrives som  
 $g(y) \cdot y' = h(x)$

Sjekk:

$$\begin{aligned} \text{Vs: } y' &= (C \cdot e^{4x})' \\ &= C \cdot e^{4x} \cdot 4 = \underline{\underline{4C \cdot e^{4x}}} \end{aligned}$$

$$\text{Hs: } \underline{\underline{4y}} = \underline{\underline{4C \cdot e^{4x}}}$$

Initial value problem = Startwertproblem

$$y' = 4y \quad \rightarrow \quad y = C \cdot e^{4x}$$

$$y(0) = 1$$

Setter inn:  
 $x=0$   
 $y=1$

$$1 = C \cdot e^{4 \cdot 0}$$

$$1 = C \cdot e^0$$

$$1 = C \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C=1}}$$

Lösung:

$$y = 1 \cdot e^{4x}$$

$$\underline{\underline{y = e^{4x}}}$$