24/03/09: Integrasjon (kap. 15-16)

Antiderivasjon:

Problem: Gitt en funksjon $f(x)$, finn alle funksjoner $F(x)$ slik at

$$F'(x) = f(x)$$

Da kalles $F(x)$ antiderivert til $f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x$

Finn $F(x)$ s.a. $\boxed{F'(x) = 2x}$

Svar: $F(x) = x^2$

$F(x) = x^2+1$

$F(x) = x^2+c$

Løsningen på $F'(x) = f(x)$ ser alltid ut som $F(x) = \ldots\ldots + C$.

Hvorfor det?

For det første: $(C)' = 0$ (C betyr en konstant)

For det andre: Det fins ingen andre funksjoner med derivert $= 0$

Eks: $f(x) = x^3 + 1$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + C$$

$(x^2)' = 2x$

$(x^4)' = 4x^3$

$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$

Eks: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$$F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

Skrivemåte:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

integraltegn

funksjonen som skal antideriveres

x er variabelen

- dette kalles et ubestemt integral
- C kalles integrasjonskonstant

Eks: $\int (x^3 + 1)\, dx = \frac{1}{4}x^4 + x + C$

$$\int (1 + x + x^2 + x^3)\, dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 -$$

Regneregler for integrasjon:

(1) $\int (u \pm v)\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx$

(2) $\int (c \cdot u)\, dx = c \cdot \int u\, dx$

u, v uttrykk

c konstant

Eks: $\int (x+1)\, dx = \underline{\frac{1}{2}x^2 + x + C}$

$$\left(\begin{aligned} &\int x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 + C' \\ &\int 1\, dx = x + C \end{aligned} \right)$$

$$\int (5x)\, dx = 5 \int x\, dx = 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$= \underline{\frac{5}{2} \cdot x^2 + C}$$

Regneregler for spesielle funksjoner:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow \int n \cdot x^{n-1}\, dx = x^n + C$$

(3) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C = \dfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$

(3) $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$

Eks:

$$\int x^4 \, dx = \frac{1}{5} \cdot x^5 + C$$

$$\int x^7 \, dx = \frac{1}{8} x^8 + C$$

$$\int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C$$

$$\frac{1}{3/2}$$

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} + C$$

$$\int x^{-2} \, dx = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Trigonometriske funksjoner:

(4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(6) $\int (\tan^2 x + 1) \, dx = \tan x + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(-\cos x)' = \sin x$

$(\tan x)' = \tan^2 x + 1$

$= \frac{1}{\cos^2 x}$

Eksponensial- og logaritmefunksjoner:

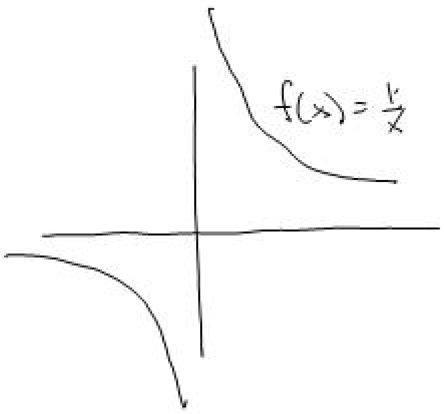
(7) $\int e^x \, dx = e^x + C$

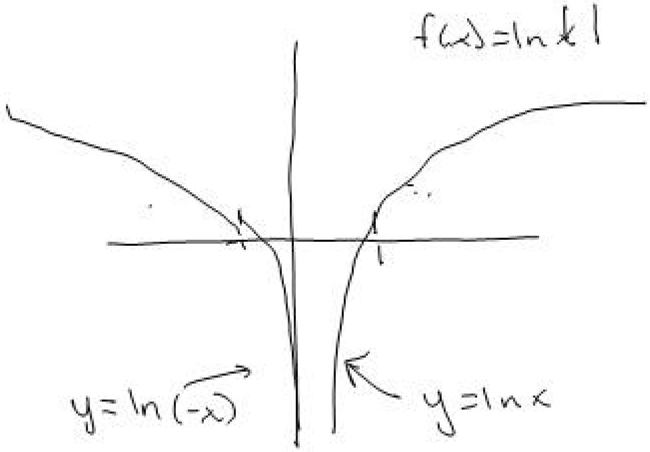
(8) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Forklaring på at $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$:





$f(x) = \ln|x|$

$f(1) = \ln|1| = \ln 1 = 0$

$f(-1) = \ln|-1| = \ln 1 = 0$

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$x > 0$: $y = \ln x$ $\quad y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0$: $y = \ln(-x)$ $\quad y' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Oppsummering:

1. $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$
2. $\int (c \cdot u)\,dx = c \cdot \int u\,dx$ c konstant
3. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $n \neq -1$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

   $\int (\tan^2 x + 1)\,dx = \tan x + C$
7. $\int e^x\,dx = e^x + C$
8. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Eks: $\int (e^x + 5\sin x - \cos x)\,dx = e^x + 5(-\cos x) - \sin x + C = \underline{e^x - 5\cos x - \sin x + C}$

$\int \frac{2}{x}\,dx = \underline{2 \cdot \ln|x| + C}$