10/03/2009: Eksponensial funksjoner, Logaritme funksjoner } kap. 11.1-11.7

Repetisjon:

Potenser, regneregler:

$$\begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ a^m / a^n = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \end{cases}$$

Prosentregning:

$f(t)$: funksjon av tiden t

endring : r % per tidsenhet

$$f(t+1) = f(t) \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Eks:

	1 år	2 år
Bank:	5%	5%
Aksjefond:	40%	−30%
	30%	−20%

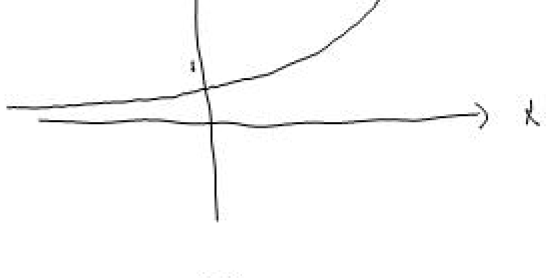
$1.05^2 =$

$1.40 \cdot 0.7 = 0.98$

$1.30 \cdot 0.8 = 1.04$

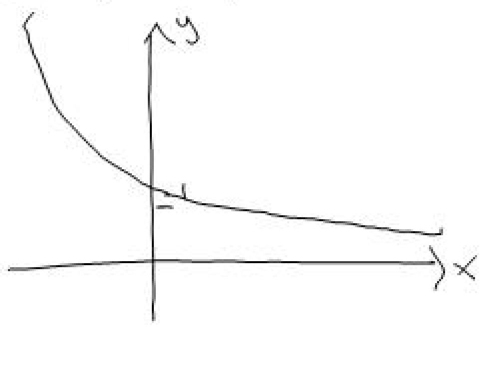
Eksponensial funksjoner:

$$f(x) = a^x \quad , a > 0$$



$a > 1$

$a = 1 + \frac{r}{100} \quad (r > 0)$



$0 < a < 1$

$a = 1 + \frac{r}{100} \quad (r < 0)$

Derivasjon av $f(x) = a^x$

Forsøker å bruke definisjonen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \cdot \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}$$

<u>$a = 2$:</u>

$$f(x) = 2^x$$
$$f'(x) = 2^x \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \right) \simeq 2^x \, 0.69$$

<u>$a = 3$:</u>

$$f(x) = 3^x$$
$$f'(x) = 3^x \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \right) \simeq 3^x \cdot 1.10$$

<u>Euler's tall:</u>

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \to 0^+} (1+h)^{1/h}$$

$$e \simeq 2.718281828459045\ldots$$

En viktig funksjon:

Eksponensialfunksjonen med grunntall $a=e$.

$$f(x) = e^x \qquad (e \simeq 2.718)$$

$$f'(x) = e^x$$

Når $a=e$:

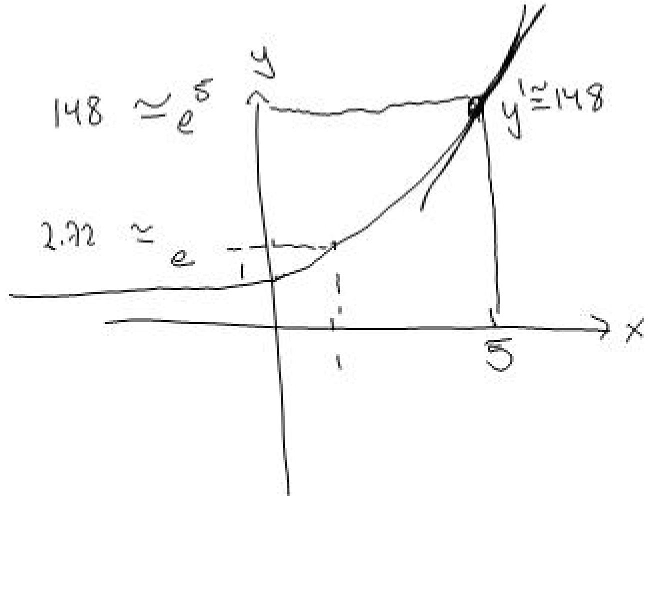
$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\overbrace{(1+h)^{1/h}}^{e}\right]^h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{1}+h)-\cancel{1}}{h} = 1$$

$f(x) = e^x$

$e \simeq 2.72 = 1 + \frac{r}{100}$

$(r \simeq 172\%)$



Logaritmer:

$$f(x) = \log_a(x)$$

Eks:

$\log_2(x)$ – logaritme med grunntall 2

$\log_3(x)$ – –– " –––– 3

$\vdots$

$\log_e(x) = \ln(x)$ – naturlig logaritme e

$\log_{10}(x) = \lg(x) = \log(x)$ – Briggsk logaritme 10

Eks:

$$2^x = 4$$

$$x = \log_2(4) = 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sin x = 1/2, \quad 0 \le x < \tfrac{\pi}{2}$$

$$x = \sin^{-1}(1/2) = \pi/6$$

$\log_2(4)$ = det tallet vi må opphøye 2 i for å få 4.
$= 2$

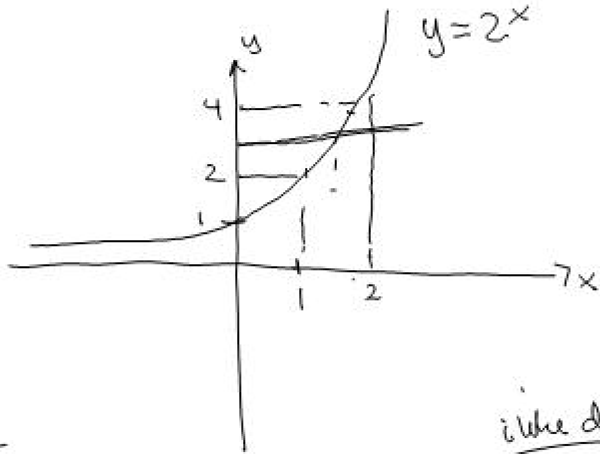
$\sqrt{100}$ = det tallet som opphøyd i 2dre gir 100
$= 10$

Definisjon:

$\log_a(x)$ = det tallet som opphøyd i a gir x

= det tallet y slik at $a^y = x$

Eks: $\log_2(x)$



$\log_2(4) = 2$

$\log_2(2) = 1$

$\log_2(3) =$ et tall mellom 1 og 2

$\log_2(10) =$ litt mer enn 3

ikke definert

$\log_2(-1) =$ tallet x sa

$2^x = -1$

$a > 0$: $f(x) = \log_a(x)$

$D_f = (0, \infty)$

Hvordan regne ut $\log_a$?

$\begin{cases} a = e: & \ln(x) \\ a = 10: & \lg(x) = \log(x) \end{cases}$

Eks: $\log(3) \simeq 0.477$

$\ln(3) \simeq 1.099$

$\log_2(3)$:

Alt 1: $\log_2(3) = \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq \underline{\underline{1.585}}$

Formel: $\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}}$

Alt 2: $2^x = 3$

Likningen $2^x = 3$

(1) $2^x = 3$

$\log_2(2^x) = \log_2(3)$

$x = \log_2(3)$

$x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq \underline{\underline{1.585}}$

(2) $2^x = 3$

$\ln(2^x) = \ln(3)$

$\frac{x \cdot \cancel{\ln(2)}}{\cancel{\ln(2)}} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$

$x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \simeq \underline{\underline{1.585}}$

Regneregler for logaritmer:

(1) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

(2) $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$

(3) $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

gjelder også for $\log_a$.