

# Logaritmer og eksponensialfunksjoner

(kap. 11.1 - 11.7)

## Eksponensialfunksjoner

Eks:  $f(x) = x^2$  polynom, andregradsfunksjon  
 $g(x) = 2^x$  eksponensialfunksjon.

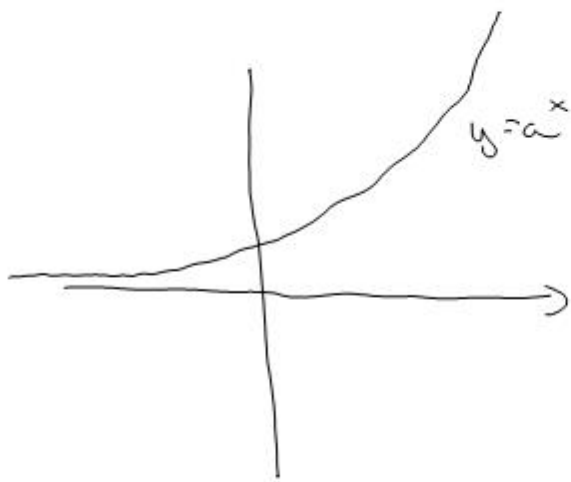
Defn: Eksponensialfunksjonen med  
grunnstoff  $a > 0$  er

$$f(x) = a^x$$

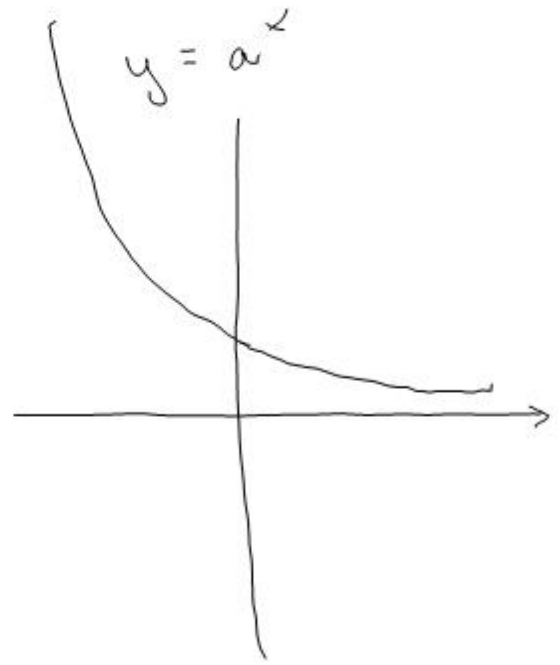
Eks:  $f(x) = 2^x$

$x$	0	1	2	10	100	-1	-2	-10
$2^x = f(x)$	1	2	4	1024	$\approx 2.76 \cdot 10^{30}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{1024}$
$x^2 = g(x)$	0	1	4	100	10.000			

Typisk graf for  $a^x$ :



$a > 1$



$0 < a < 1$

Hva skjer:

Hvis  $a=1$ :

$$a^x = 1^x = 1$$

Hvis  $a=0$ :

$$a^x = 0^x = 0$$

Hvis  $a < 0$ :

$$(-1)^x$$

$$(-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$$

Hvordan regne ut:  $x=0: 2^0 = 1$

$$x=1: 2^1 = 2$$

$$x=2: 2^2 = 4$$

$$x = \frac{1}{2}: 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$x = 0.451: 2^{0.451}$$

$$= 2^{\frac{451}{1000}}$$

$$= \left( \sqrt[1000]{2} \right)^{451}$$

Exo:

En by har en befolkning på 10.000 på et bestemt tidspunkt  $t=0$ . Hvis befolkningen øker med 7% per år, hva er befolkningen etter  $t$  år?

$b(t)$  : befolkningen etter  $t$  år

$$b(0) = 10.000$$

$$\begin{aligned} b(1) &= 10.000 + 10.000 \cdot 0.07 \\ &= 10.000 \cdot (1.07) \\ &= 10.700 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(2) &= 10.700 \cdot 1.07 \\ &= 10.000 \cdot 1.07^2 \\ &= 11.449 \end{aligned}$$

$$b(t) = 10.000 \cdot 1.07^t$$

$$b(x) = 10.000 \cdot 1.07^x$$

Etter hvor lang tid har befolkningen økt til 15.000?

$$\frac{15.000}{10.000} = \frac{10.000 \cdot 1.07^t}{10.000} \Rightarrow 1.5 = 1.07^t$$

Exo: Et radioaktivt stoff med halveringstid 22 år.

Massen av radioaktivt stoff:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/a}$$

$m$ : massen radioaktivt stoff  
etter  $t$  år

$m_0$ : ——— | | —————  
ved  $t=0$

$a$ : en konstant

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{a}} \\ &= m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}t} \\ &= m_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}\right)^t \end{aligned}$$

$$\frac{\cancel{m_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/a}}{\cancel{m_0}} = \frac{\cancel{m_0}}{2}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/a} = \frac{1}{2}$$

$$t/a = 1 \quad \underline{\underline{t=a}}$$

Eks:

Halveringstid = 22 år :  $a = 22$

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/22} \\ &= m_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{22}}\right)^t \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{22}} \approx 0.96898 = 1 - \frac{r}{100}$$

$$= 1 - 0.03102$$

$$\Rightarrow r \approx 3.1\%$$

Reduksjon  
per år.