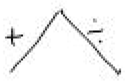
Derivasjon

(a) Metode for å finne lokale topp/bunnpkt

* Metode I: Sette opp fortegnsskjema for $f'(x)$.



: lokalt topp-pkt

: lokalt bunnpkt

* Metode 2: Andrederivert-testen

- Finn alle stasjonære punkter for f, dvs løser likningen $f'(x)=0$.
- For hvert stasjonært punkt $x=a$, regn ut $f''(a)$.

$f''(a) > 0$:  lokalt bunnpkt i $x=a$

$f''(a) < 0$:  lokalt topp-pkt i $x=a$

$f''(a) = 0$: ingen konklusjon.

Eks:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Metode 2: Andrederivert-testen

Stasjonære pkt: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x + 4 = 0$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-48}}{6}$$ ingen løsn.

Eks:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

Metode 2: Andrederivert-testen

Stasjonære pkt: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{6} = \underline{1}$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Regn ut $f''(1)$: $f''(x) = 6x - 6$

$$f''(1) = 0$$

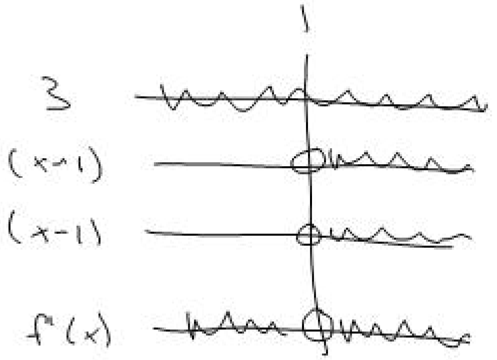
ingen konklusjon.

Metode I. Fortegnsskjema for $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x^2 - 6x + 3 = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

$$f'(x) = 3 \cdot (x-1)^2$$



hverken topp-pkt
eller bunnpkt.

Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$

Andrederivert-testen:

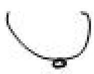
$f'(x) = 0$: $\quad 3x^2 - 6x - 3 = 0$

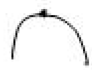
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 36}}{6} = \frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{6}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

$x_1 = 1 + \sqrt{2} \cong 2.4 \qquad x_2 = 1 - \sqrt{2} \cong -0.4$

$f''(x) = 6x - 6$

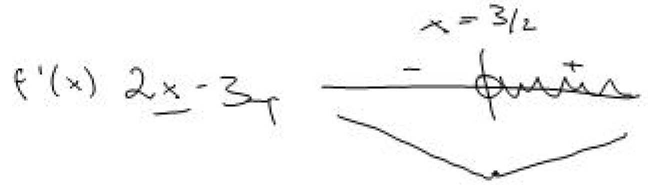
$f''(x_1) \cong 6(2.4) - 6 > 0$  $\Rightarrow x = x_1 \cong 2.4$ gir lokalt bunnpkt

$f''(x_2) \cong 6 \cdot (-0.4) - 6 < 0$  $\Rightarrow x = x_2 \cong -0.4$ gir lokalt topp-pkt.

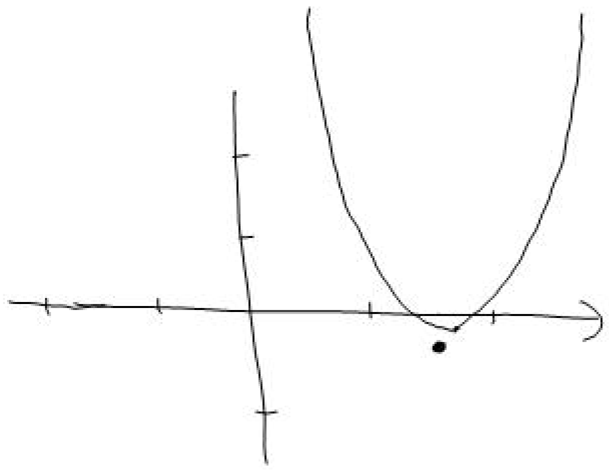
(6) Største og minste verdi for f (Kap 8.6)

Eks: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3$



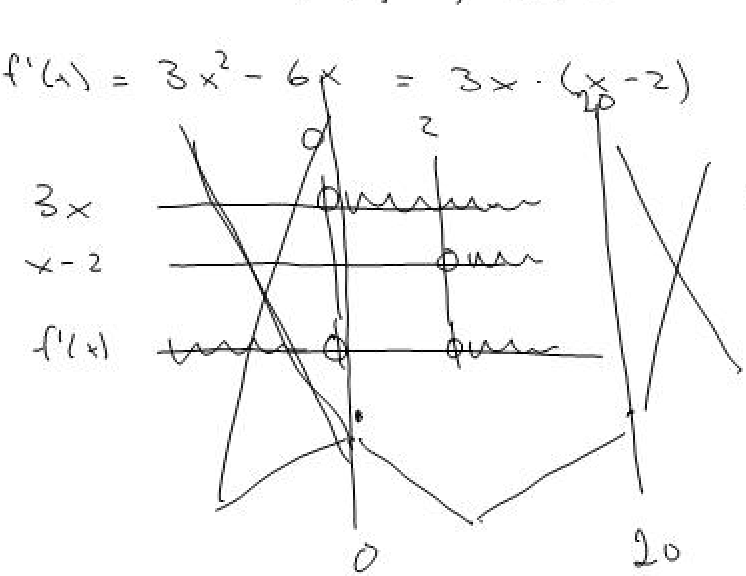
lokalt bunnpkt: $(3/2, f(3/2)) = (3/2, -1/4)$



* $x = 3/2 \quad y = -1/4$ gir minste verdi
* ingen største verdi

Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, ~~hvor~~ $x \in [0, 20]$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x-2)$



$\underline{x=0}$: $(0, 1)$ er lokalt topp-pkt

$\underline{x=2}$: $(2, -3)$ er lokalt bunnpkt.

<u>Metode:</u> – Sett opp fortegnsskjema for $f'(x)$ og finn lokale topp/bunnpkt.

– Se på randpunkt til defn.mengden

<u>Eks:</u> randpunktene til $[0,20]$ er 0 og 20

– Trekk konklusjon fra fortegnsskjema, y-verdien i lokale topp/bunnpkt og y-verdien i randpunkt.

<u>Resultat:</u> Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og D_f er <u>lukket og begrenset</u>, så har f en største og minste verdi.

<u>begrenset</u>: "ikke uendelig"

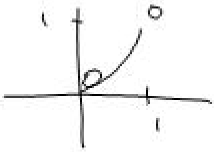
<u>lukket</u>: randpunktene er med i D_f.

<u>Eks:</u> $D_f = (0,1)$ $\begin{cases} \text{begrenset} \\ \text{ikke lukket} \end{cases}$

$D_f = [0,20]$ lukket og begrenset

$D_f = [0,\infty)$ $\begin{cases} \text{lukket} \\ \text{ikke begrenset} \end{cases}$

<u>$f(x) = x^2,\ x \in (0,1)$</u>



Eks: $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, $x \in [0,2]$

Finn største og minste verdi.

(1) Finner lokale topp/bunnpkt.

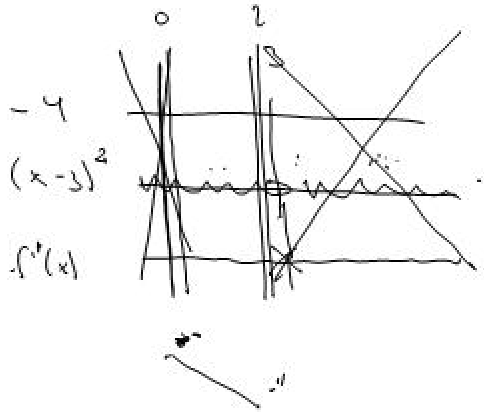
$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-3} = \frac{u}{v}\right)'$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x+1 & v = x-3 \\ u' = 1 & v' = 1 \end{array}}$$

$$= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (\cancel{x} - 3) - (\cancel{x} + 1) \cdot 1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{-4}{(x-3)^2}$$



ingen lokale topp/bunn.

(2) Randpkt: $D_f = [0,2] \rightarrow x = 0$ og $x = 2$

$x = 0$: $y = f(0) = -1/3$

$x = 2$: $y = f(2) = -3$.

Konklusjon: Største verdi $y = -1/3$ for $x = 0$
Minste verdi $y = -3$ for $x = 2$