Derivasjon — bruk av derivasjon i funksjonsdrøfting (kap. 8.4–8.6)

Repetisjon: – hvordan regne ut den deriverte
– husk at den deriverte gir oss momentan vekstfastighet

$f'(x)$: hvor raskt f vokser i punktet x

Funksjonsdrøfting:

Gitt en funksjon $f(x)$

- nullpkt. / skjæring med koordinataksene
- defn mengde / verdimengde
- asymptoter
- tegne grafen

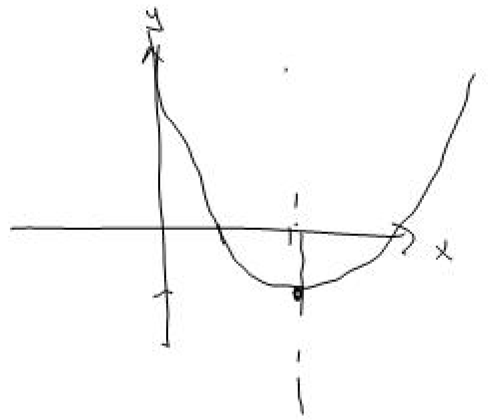
Defn. Monotoniegenskaper (når en funksjon vokser / avtar)

f vokser: $f(x_2) \geq f(x_1)$ når $x_2 > x_1$

f avtar: $f(x_2) \leq f(x_1)$ når $x_2 > x_1$

Ex: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Finn monotoniegenskapene til f.



$x = 2$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$= (x-2)^2 - 1$$

$x \in [2, \infty)$

f vokser når $x \geq 2$

f avtar når $x \leq 2$

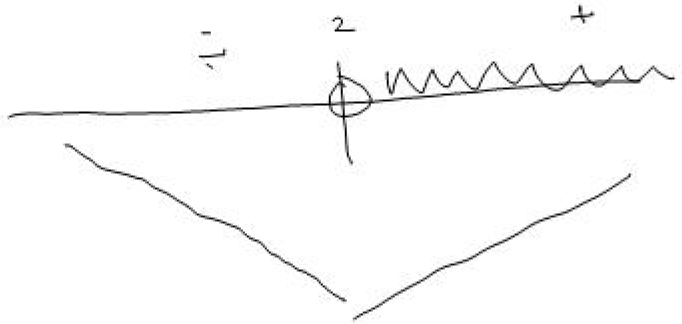
$x \in (-\infty, 2]$

Ved hjelp av derivasjon:

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4 \cdot 1 + 0 = \underline{2x - 4}$$

Setter opp fortegnsskjema for $f'(x)$.

$f'(x) = 2x - 4$



f vokser når $x \in [2, \infty)$

f avtar når $x \in (-\infty, 2]$

Resultat:

$$\boxed{\begin{array}{llll} f & \text{vokser} & \text{når} & f'(x) \geq 0 \\ f & \text{avtar} & \text{når} & f'(x) \leq 0 \end{array}}$$

Metode:

Setter opp fortegnsskjema for $f'(x)$ og leser av når f vokser/avtar.

Eks:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 - 0$$

$$= \underline{3x^2 - 4x + 2}$$

Fortegnsskjema:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Faktoriserer:

$3x^2 - 4x + 2 = 0$

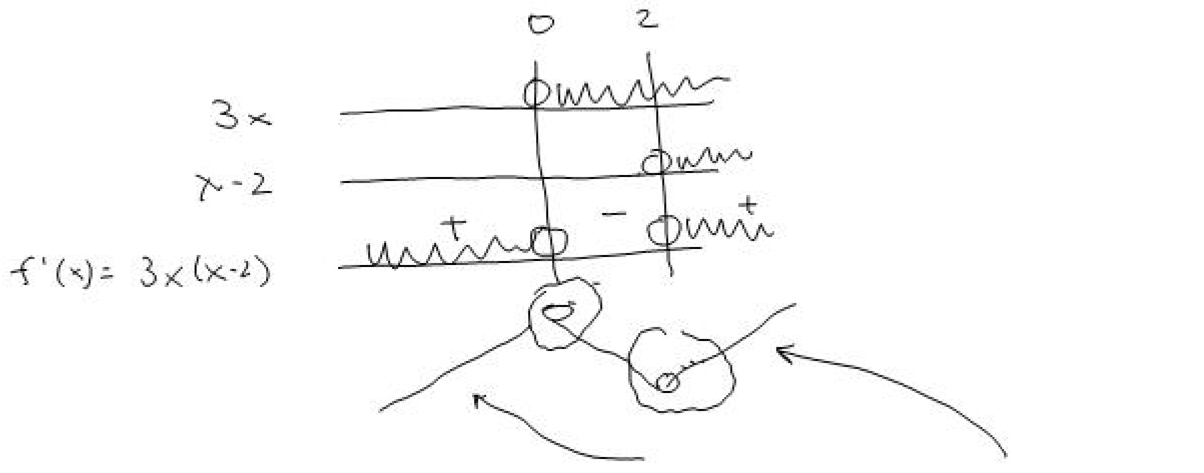
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

ingen løsn.

f vokser for alle x

Eks: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$



f vokser når $x \in (-\infty, 0]$ og når $x \in [2, \infty)$

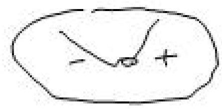
f avtar når $x \in [0,2]$

Lokale topp-/bunnpkt:

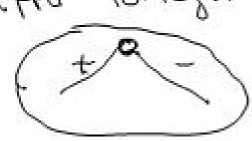
Et stasjonært punkt er et punkt der $f'(x) = 0$

Tre typer av stasjonære punkter:

lokalt bunnpunkt: stasjonært punkt der $f'(x)$ skifter fortegn fra ÷ til +



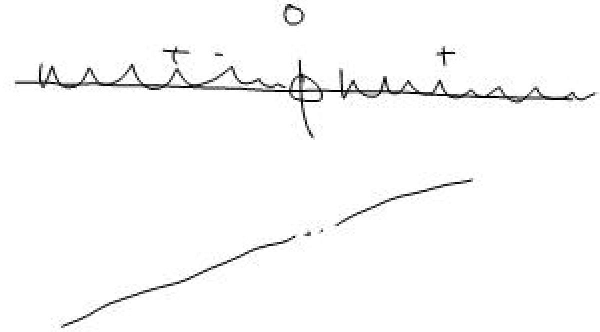
lokalt topp-punkt: stasjonært punkt der $f'(x)$ skifter fortegn fra + til ÷



Sadelpunkt: stasjonært punkt (dvs $f'(x)=0$) men hverken lokalt topp- el bunnpkt

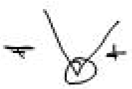
Eks: $f(x) = x^3$

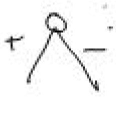
$f'(x) = 3x^2$

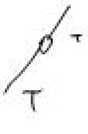
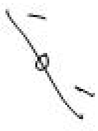
$f'(x) = 3x^2$ 

Metode for å finne lokale topp/bunnpkt:

Sett opp fortegnsskjema for $f'(x)$ og leser av:

 : lokalt bunnpkt

 : lokalt topp-punkt

 eller  : sadelpunkt

Andre navn: l. topp-punkt, l. maksimumspunkt; l. bunnpunkt, l. minimumspunkt

l. ekstremalpunkt

l. = lokalt

Eks: $f(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$

$$f'(x) = (x\sqrt{x} - \sqrt{x})'$$

$$= \left(x^{3/2} - x^{1/2}\right)'$$

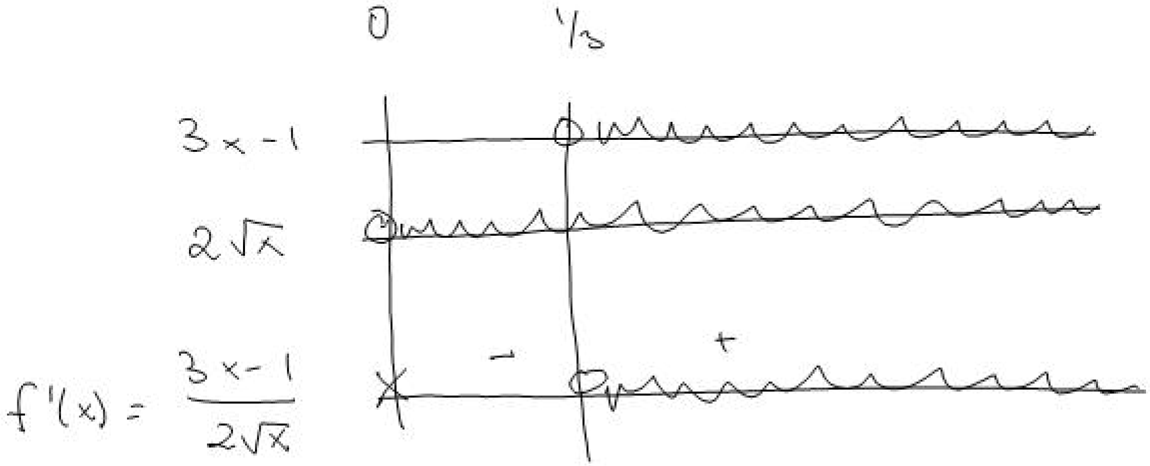
$$= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

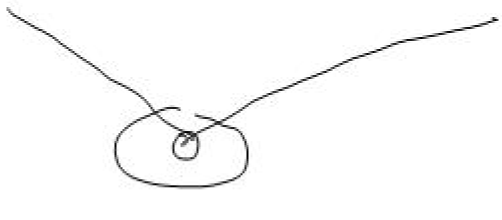
$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}}}$$

$$x\cdot\sqrt{x} = x^1\cdot x^{1/2} = x^{1+1/2} = x^{3/2}$$





Lokalt bunnpunkt: $x = 1/3$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$$