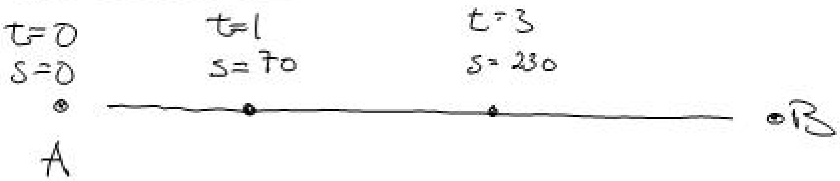
Derivasjon (kap. 8)

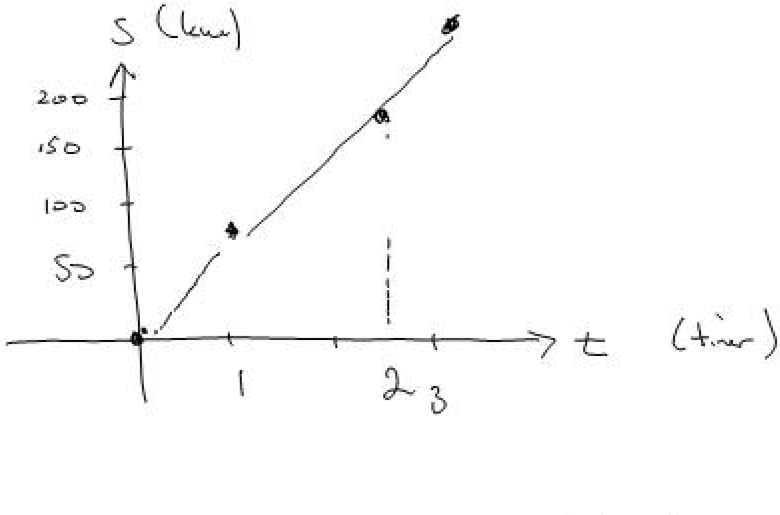
Veksthastighet / vekstfart, endringshastighet.

Eksempel I:



s : ~~tilbakelagt~~ strekning (i km)

t : tiden (i timer)



Gjennomsnittlig veksthastighet:

Fra t=0 til t=1: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1)-s(0)}{1-0} = \frac{70-0}{1-0} = \underline{70 \text{ km/t}}.$

t=1 til t=3: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{230-70}{3-1} = \frac{160}{2} = \underline{80 \text{ km/t}}.$

Momentan
Spontan } veksthastighet = veksthastighet

For $t=2$:

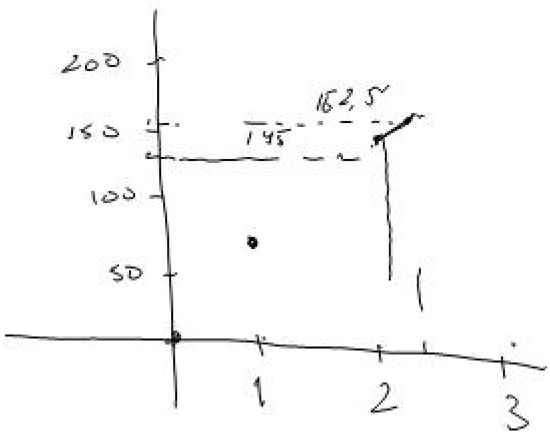
$t=2$, $s=s(2)$ $\quad$ $t=2{,}1$, $s=s(2.1)$

$s=145$ $\quad$ $s=152.5$

Fra $t=2$ til $t=2.1$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{152{,}5 - 145}{2.1 - 2} = \frac{7.5}{0.1}$$

$$= \underline{75 \text{ km}/t}$$



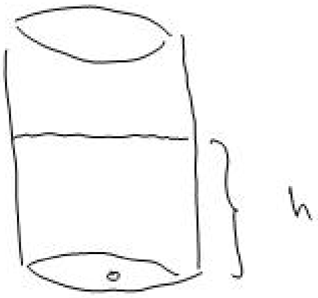
Momentan hastighet ved $t=2$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2} = \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$$

Definisjon: Momentan veksthastighet
Veksthastighet for s ved $t=2$

$$\boxed{s'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h}}$$

Eksempel 2:



t: tiden (i sek)
h: høyden (i m).

$t=0$: $h(0) = 0.3\,m$
$t=10$: $h(10) = 0.21\,m$

Gjennomsnittlig veksthastighet:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(10)-h(0)}{10-0} = \frac{0.21-0.30}{10-0}$$

$$= -0.09/10 = -0.009\ m/s$$

Momentan veksthastighet: (i $t=0$)

$$h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0+t) - \overset{0.3}{\overset{\shortparallel}{h(0)}}}{(0+t)-0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{h(t)-0.3}{t}$$

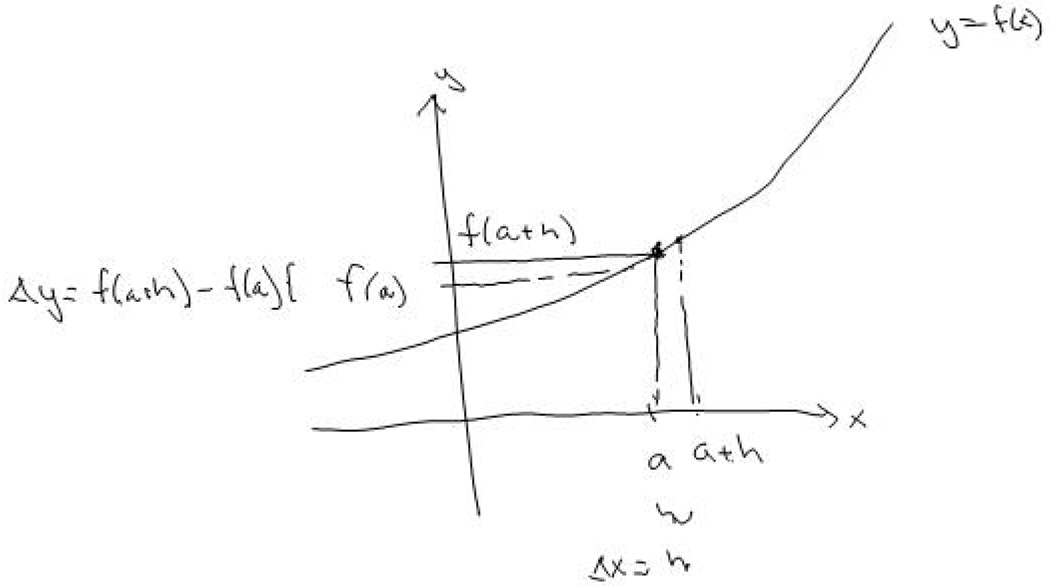
Derivasjon og veksthastighet

Vi ser på funksjonen $y = f(x)$.

Definisjonen:

Momentan veksthastighet av f i $x = a$ er

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

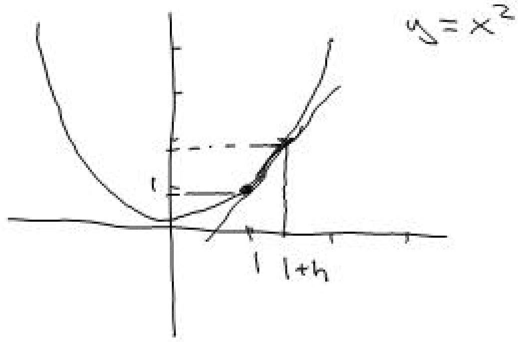


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Eks:

$f(x) = x^2$

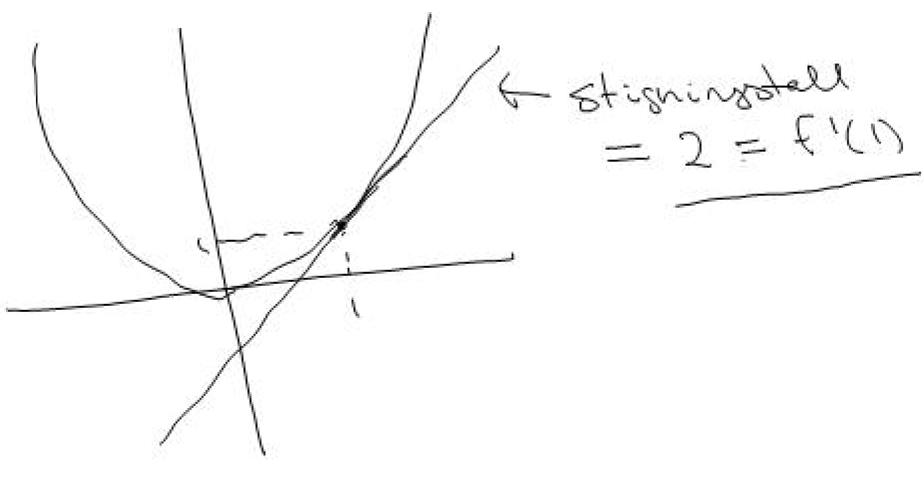
$a = 1$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \underline{2+h}$$

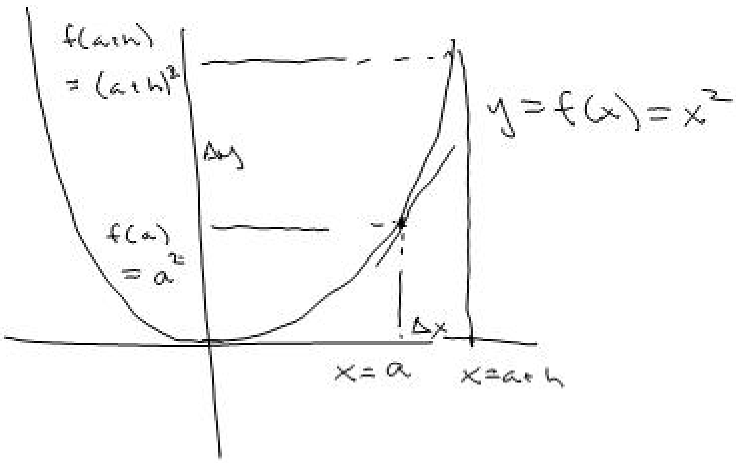
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} 2+h = \underline{2}$$



Eksempel: $y = f(x) = x^2$

$$f'(1) = 2$$

$$f'(a) = ?$$



f'(a):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h}$$

$$= \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a + h$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = \underline{\underline{2a}}$$

Konklusjon: Når $f(x) = x^2$, så blir

$$\underline{f'(a) = 2a}$$

Definisjon: derivasjon

Vi ser på en funksjon $f(x)$.

Den deriverte til funksjonen f er gitt som

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Eks:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}\right\}$$

Regnet ut direkte fra definisjonen, som en grenseverdi.