Grenseverdier
Asymptoter $\Big\}$ kap. 7.

Eks: $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$

Hva skjer med $f(x) = \frac{1}{x-2}$ når x er nær 2, men ikke lik 2.

x	2.1	2.01	2.001	2.0001
y	10	100	1000	10.000

x	1.9	1.99	1.999
y	−10	−100	−1000

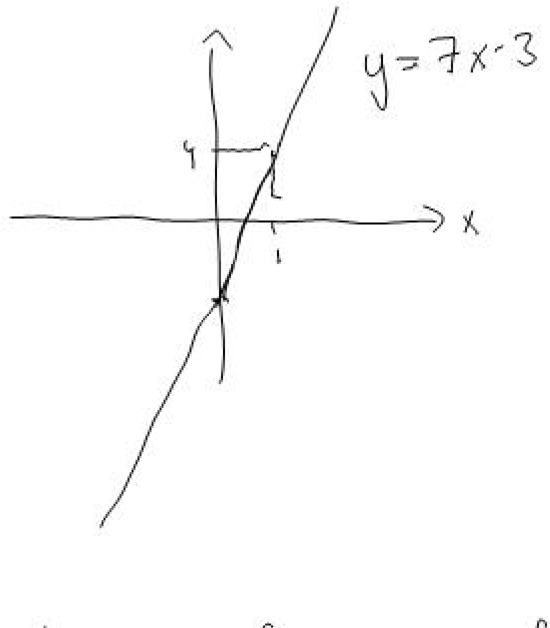
$x \to 2^+ : f(x) \to \infty$
$x \to 2^{\div} : f(x) \to -\infty$ $\Big\}$ grenseverdier

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to 2^{\div}} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$ (x radianer)

x	0.1	0.01	−0.1	−0.01
$\frac{\sin x}{x}$	0.998	0.99998	0.998	0.99998

<u>Eks</u>: $\lim_{x \to 1} (7x - 3) = \underline{\underline{4}}$



$f(1) = 7 \cdot 1 - 3 = \underline{4}$

Vi skal først og fremst se på grenseverdier av rasjonale funksjoner, dvs

$$f(x) = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}} = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x - 2}$$

Polynom:

Eks:

polynom $\begin{cases} f(x) = 4 & \text{grad } 0 \\ f(x) = x+1 & \text{grad } 1 \\ f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3 & \text{grad } 2 \\ f(x) = x^3 - 4 & \text{grad } 3 \end{cases}$

$\vdots$

ikke polynom $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = \sin x \\ f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f(x) = x^{3/2} \end{cases}$

Rasjonal funksjon:

$$f(x) = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$$

Eks: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f(x) = x^2 - 1 = \frac{x^2-1}{1}$$

Hvordan regner vi ut grenseverdier:

Metode I: Innsetting

Eks: $\lim_{x \to 4} x-3 = 4-3 = \underline{\underline{1}}$

Hvorfor blir dette riktig?

$f(x) = x-3 \quad , D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$f(4) = 4-3 = 1$

$\lim_{x \to 4} f(x) = 1$

Kontinuerlige funksjoner:

Defn: * $f(x)$ er kontinuerlig i $x=a$

betyr at $\boxed{f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$.

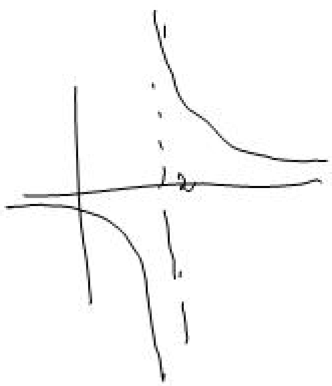
* Dette betyr at grafen til $y=f(x)$ ikke gjør noen "hopp" i $x=a$.

Alle "vanlige" funksjoner er kontinuerlige overalt hvor de er definert.

* <u>Polynom funksjoner</u> er kontinuerlige overalt.

$ax+b$ $\qquad$ ax^2+bx+c $\qquad$ ax^3+bx^2+cx+d

* <u>Rasjonale funksjoner</u> er kun definert der nevner $\neq 0$, og kontinuerlige der de er definert.



$f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$

---

* <u>Defn:</u> $f(x)$ er <u>kontinuerlig</u>
$= f(x)$ er kontinuerlig overalt der den er definert.

* <u>Alle vanlige funksjoner er kontinuerlige</u>

Metode 1:

Hvis $a \in D_f$, så har vi at

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

(Forutsetter at $f(x)$ er kontinuerlig.)

Eks:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 - 3x^2 + 1 \right) = \underline{1}$$

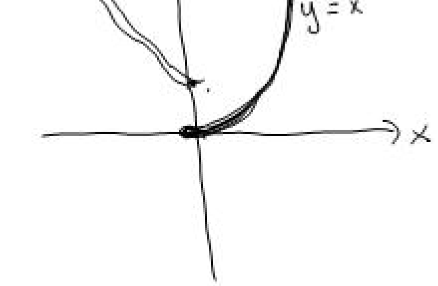
$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+2} = \underline{\frac{-1}{2}}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{0}$$

problem
$\Rightarrow$ må bruke en annen metode.

Eks:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}}$$ (delt forskrift)



$$\left.\begin{aligned} & f(0) = 0^2 = 0. \\ & \lim_{x \to 0} f(x) = \, ? \\ & \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \\ & \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \end{aligned}\right\}$$

f er ikke kont. i $x = 0$.

Eks: $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0}$$ { metode 1 kan ikke brukes.

$x \to 2$ betyr at $x-2 \to 0$, altså $x-2$ er et veldig lite tall.

$$\frac{1}{0.001} = 1000$$

$x \to 2$:

$x-2 \to 0$

$1 \to 1$

$$\frac{1}{x-2} \to \frac{1}{\text{lite tall}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \pm \infty$$

Vi tenker at $\frac{1}{\text{lite tall}} \to \infty$ og vi må ta hensyn til fortegn.

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \\ \lim_{x \to 2^÷} \frac{1}{x-2} = -\infty \end{cases}$$

$x \to 2^+$: $x-2$ lite, pos. tall

$x \to 2^÷$: $x-2$ lite, neg. tall