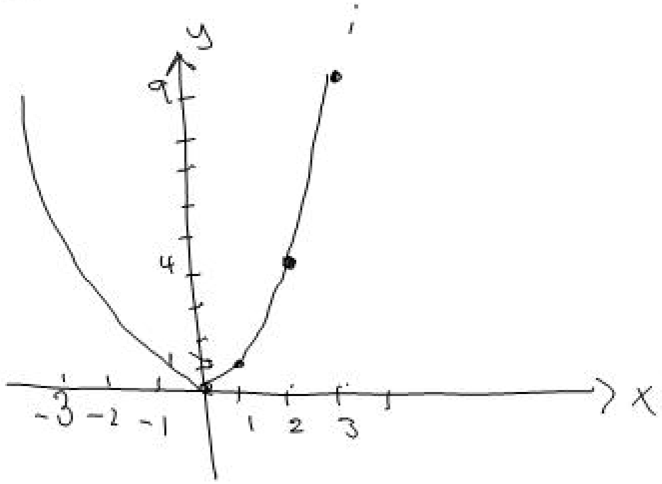
Kvadratiske funksjoner:

Defn: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

(der a, b, c er gitte tall)

Grafen kalles en **parabel**.

Eks: $f(x) = x^2$



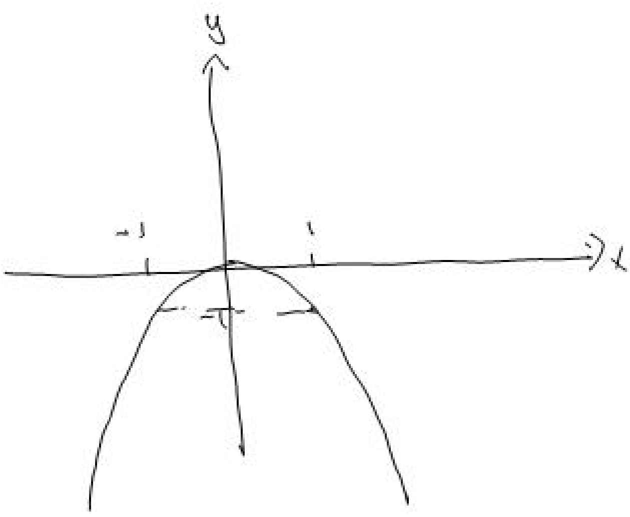
x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

x	-1	-2	-3
y	1	4	9

Eks: $f(x) = -x^2$

$f(-1) = -(-1)^2$
$= -1$

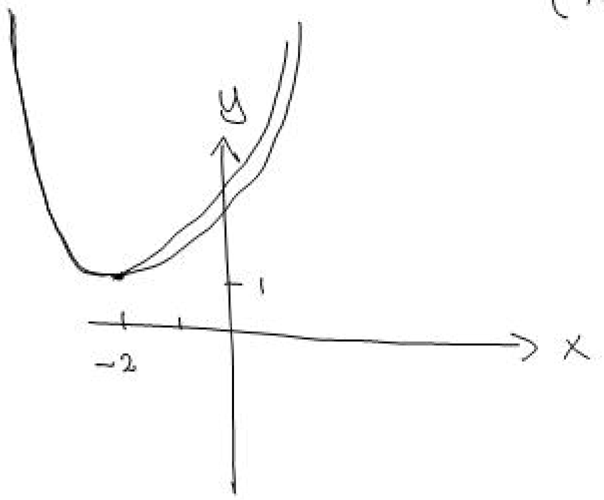
$f(1) = -1^2 = -1$



Eks:

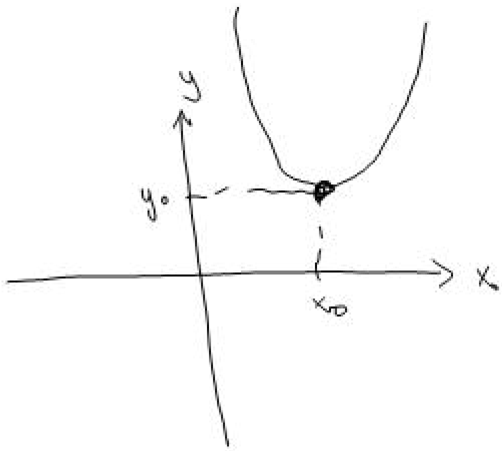
$$f(x) = x^2 + 4x + 5$$
$$= \underbrace{x^2 + 4x + 4} + \underbrace{5 - 4}$$
$$= (x+2)^2 + 1$$

$\rightarrow$ punkt: $(-2,1)$

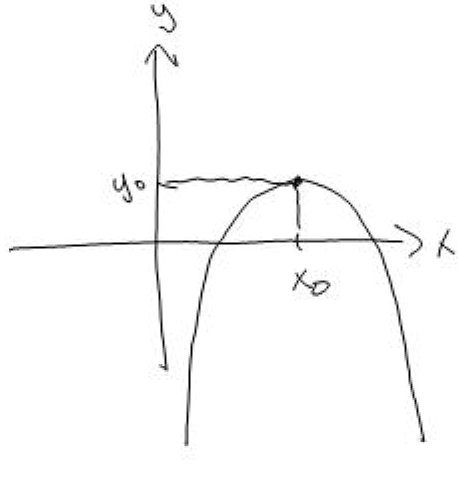


$a = 1, \quad x_0 = -2, \quad y_0 = 1$

Standard form: $\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0}$



$a > 0$



$a < 0$

Eks: $f(x) = x^2 - 6x + 10$

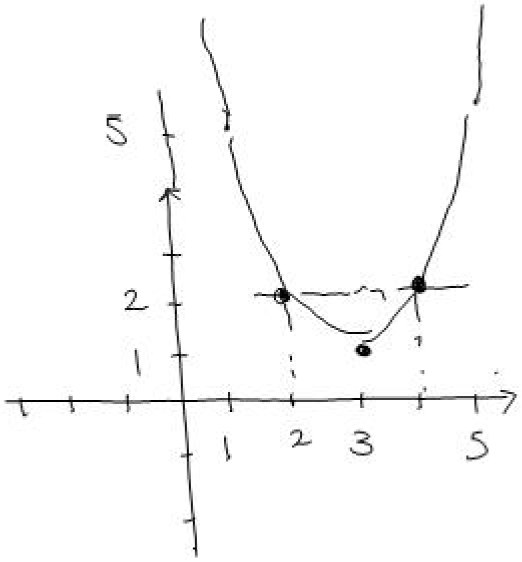
$$= \underbrace{x^2 - 6x + 9} + 10 - 9$$

$$= \underline{(x-3)^2 + 1} \equiv a(x-x_0)^2 + y_0$$

$\underline{a=1 \quad x_0=3 \quad y_0=1}$

$a>0$: $\cup$

$(x_0, y_0) = (3,1)$ bunnpkt.



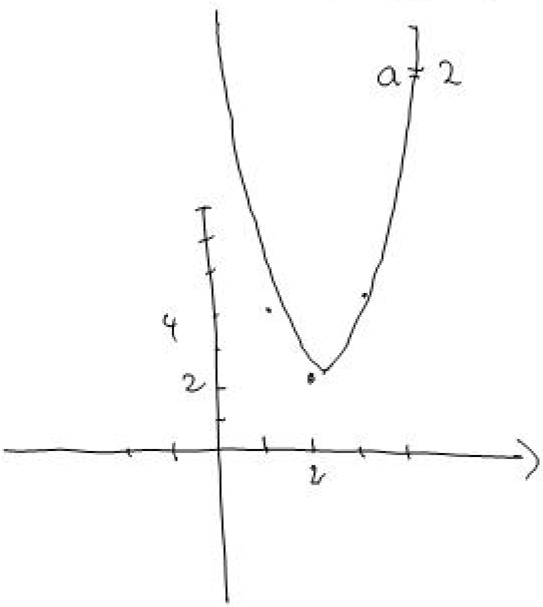
x	2	4	1
y	2	2	5

Eks: $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

$$= 2\cdot(x^2 - 4x + 4) + 10 - 8$$

$$= 2\cdot(x-2)^2 + 2$$

$a=2 \quad x_0 = 2 \quad y_0 = 2$ $\qquad a = 2 > 0$ $\cup$



x	2	3	4
y	2	4	10

Oppsummering: Standard form

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0}$$

* Topp-pkt / bunnpkt: (x_0, y_0)

* $\begin{cases} a > 0 : & \cup \quad \text{bunnpkt } (x_0, y_0) \\ a < 0 : & \cap \quad \text{topppkt } (x_0, y_0) \end{cases}$

* $|a|$ forteller hvor <u>bratt</u> parabelen er.

<u>Eks:</u>

Defn: Gitt en funksjon $f(x)$.

Et nullpunkt for f er et skjæringspunkt med y-aksen, eller et punkt der $f(x) = 0$.

Eks: $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Finner nullpkt. for f ved regning:

$$f(x) = 0$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$$

$x = \frac{12}{4} = 3$ eller $x = 1$

Nullpkt: $(3,0)$ og $(1,0)$

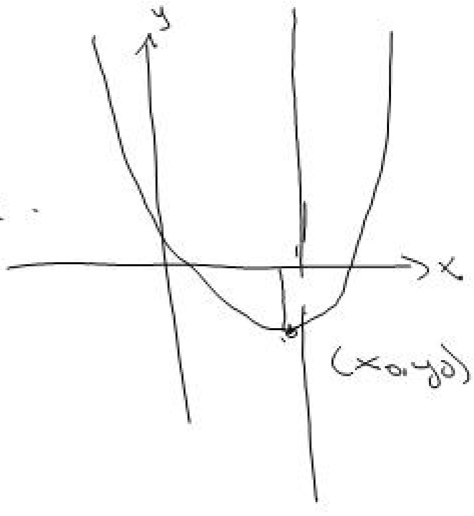
Kvadratisk funksjon: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nullpkt: $f(x) = 0$ $\quad ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_0)^2+y_0$$

Linjen $x=x_0$ kalles <u>Symmetrilinjen</u> til funksjonen $f(x)=ax^2+bx+c$.



Parabelen er symmetrisk om $x=x_0$

$x=x_0$

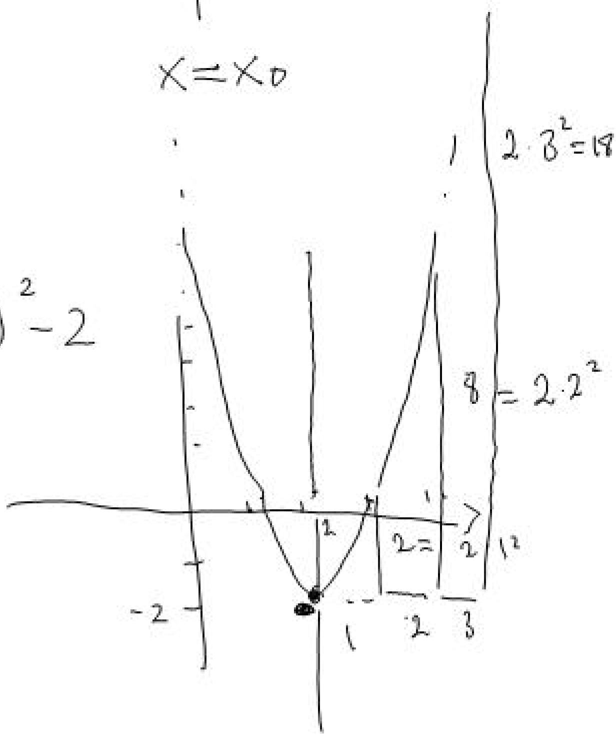
<u>Formel for x_0:</u>

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

<u>Eks:</u> $f(x) = 2x^2-8x+6 = 2\cdot(x-2)^2-2$

$$x_0 = \frac{-(-8)}{2\cdot 2} = 2$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ &= f(2) \\ &= 2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$



$x=x_0=2$

Symmetrilinjen

Eks:

$f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

Nullpkt: $f(x) = 0$

$$2x^2 - 8x + 10 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{4}$$

$$= \frac{8}{4} \pm \frac{\sqrt{-16}}{4}$$

$$= 2 \pm \frac{\sqrt{-16}}{4}$$

$$\shortparallel$$

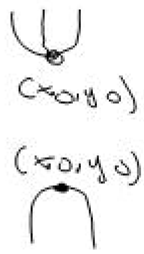
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$$

Bunnpkt / topp-pkt.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratisk funksjon

$x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0: & (x_0, y_0) \text{ bunnpkt} \\ a < 0: & (x_0, y_0) \text{ topp-pkt} \end{cases}$$



Grafisk løsning

$\left\langle \begin{array}{l} \text{Likninger} \\ \text{Ulikheter} \end{array} \right\}$ Kap 3.7, 4.2

Tilfelle I:

Likningen $f(x) = g(x)$:

Eks: $x^2 - 2x + 4 = x - 7$

* Vi tegner grafene $y = f(x)$ og $y = g(x)$ i samme koordinatsystem.

Eks: $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = x - 7 \end{cases}$

* Vi leser av skjæringspunktene mellom $y = f(x)$ og $y = g(x)$.

Eks: ingen skjæringspkt = ingen løsning

Eks: $x^2 - 2x + 4 = x + 7$

$x \simeq -0.79$ eller $x \simeq 3.79$

Eks: $x^3 - x + 1 = 0$

- Tegner opp $y = x^3 - x + 1$ og
$y = 0$ (x-aksen)

i samme koordinatsystem og

finner skjæringspunkter.

- Leser av $x \cong \underline{\underline{-1.32}}$

Eks: $x^4 - 1 = x^3 - 3x^2 + 4x$

Metode I: Tegn $\begin{cases} y = x^4 - 1 & = f(x) \\ y = x^3 - 3x^2 + 4x & = g(x) \end{cases}$

$x \simeq \underline{\underline{-0.21}}$ eller $x \cong \underline{\underline{1.36}}$

Metode: $f(x) = g(x)$

$h(x) = f(x) - g(x) = 0$

$h(x) = \underline{x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x - 1} = 0$

$x \simeq \underline{\underline{-0.21}}$ eller $x \cong \underline{\underline{1.36}}$

Tilfelle 2: Ulikhet $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ \leq \\ > \\ \geq \end{cases}$

Eks: $x^2 - 2x + 4 > x + 7$ $\boxed{y_p > y_l}$

* Tegn $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = x + 7 \end{cases}$

* Leser av: $\underline{\underline{x > 3.79}}$ eller $\underline{\underline{x < -0.79}}$

$$x^2 - 2x + 4 - x - 7 > 0$$

$$x^2 - 3x - 3 > 0$$

$\underline{\underline{x > 3.79}}$ eller $\underline{\underline{x < -0.79}}$

Tilfelle 3: Løsning av 2x2 lineære liknings-system.

Eks: $x + y = 4 \quad (1)$

$x - y = 2 \quad (2)$

(a) (1) $x + y = 4$

$y = 4 - x$

(2) $x - y = 2$

$-y = 2 - x$

$y = x - 2$

tegner linjene i samme koordinatsystem

(b) Lese av skjæringspkt:

$x = 3$, $y = 1$

Eks:

$$x + y = 4 \qquad\qquad y = 4 - x$$

$$x^2 - y = 7 \qquad\qquad y = x^2 - 7$$

$\Big\}$ tegner grafisk.

Leser av: $(x, y) = (-3.85,\ 7.85)$

eller

$(x, y) = (2.85,\ 1.15)$

Eks:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = 4 - x$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$