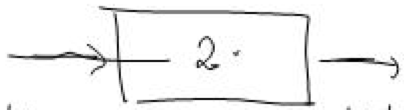
Funksjoner

- kap 3 – om funksjoner
- kap 3.7, 4.2 – grafisk løsning
- ? – Likningen til en sirkel

Eks: Funksjon f kan beskrives ved hjelp av et funksjonsuttrykk

$$f(x) = 2x$$

Funksjon



Inn	Ut
x	$f(x)$
$x=3$	$f(3) = 2 \cdot 3 = 6$
$x=-1$	$f(-1) = 2\cdot(-1) = -2$
$\vdots$	

Defn: En funksjon er en regel som til enhver lovlig x-verdi tilordner en verdi $f(x)$.

Eks: $f(x) = x^2 - 1$

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 - 1 = 0 \\ f(2) = 2^2 - 1 = 3 \\ f(3) = 3^2 - 1 = 8 \end{cases}$$

Definisjonsmengde = lovlige x-verdier

Eks: (a) $f(x) = 2x + 400$, $D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

D_f = definisjonsmengden til funksjonen f.

(b) $f(x) = 2x + 400$, $x > 0$ eller $D_f : (0, 60 \cdot 24 \cdot 31)$

$\Updownarrow$

$D_f = (0, \infty)$

$f(x)$ = månedlige ringekostnader

$\begin{cases} 400 \text{ kr} & : \text{månedsavgift} \\ 2 \text{ kr/min} & : \text{pris pr. min.} \\ x = \text{ringetid} & \text{i ant. min.} \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$, $\begin{cases} D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) \\ x \neq 2 \end{cases}$

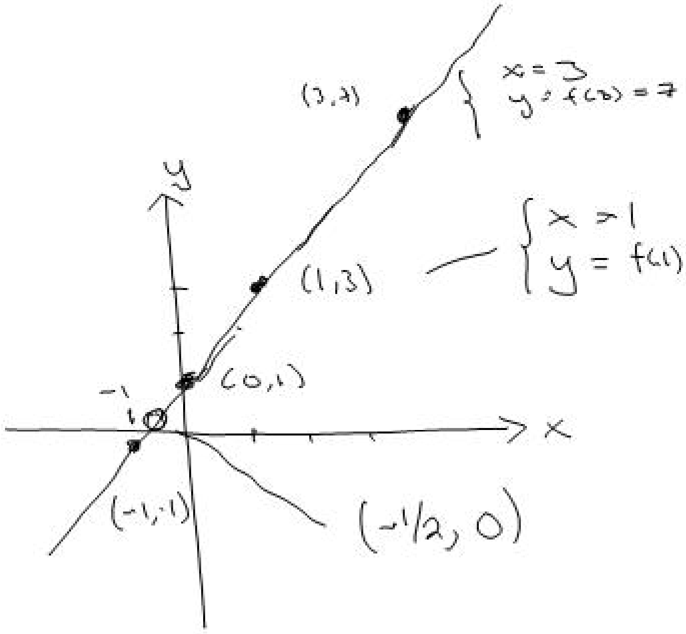
Verdimengde $= \left\{ \begin{array}{l} \text{lovlige verdier av } f(x) \\ \text{når } x \in D_f. \end{array} \right\} = V_f$

Eks: $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$V_f = [1, \infty)$

Grafen til en funksjon:

$f(x)$ er en funksjon



<u>Eks:</u> $f(x) = 2x+1$

$f(1) = 2\cdot 1+1 = 3$

$f(3) = 2\cdot 3+1 = 7$

x	1	3	6	-1	0
y	3	7	13	-1	1
	"	"	"	"	"
	f(1)	f(3)	f(6)	f(-1)	f(0)

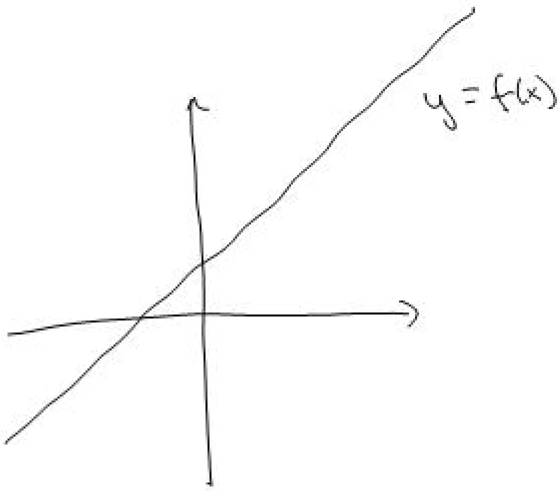
<u>Grafen til f</u> = alle punktene $(x, y=f(x))$ slik at $x \in D_f$

$= \boxed{\text{grafen til } y = f(x)}$

<u>Likningen er:</u>

$$y = 2x+1$$

Skjæringspkt med x-aksen:



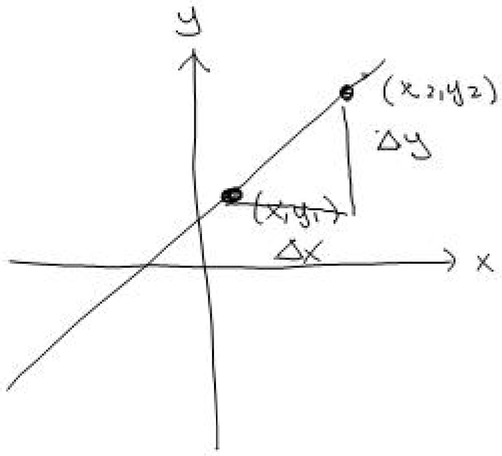
x-aksen $\quad y=0$

$$2x+1 = 0$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$x = -1/2$$

Rette linjer:



Stigningstallet:

$\Delta y = y_2 - y_1$ endring i y

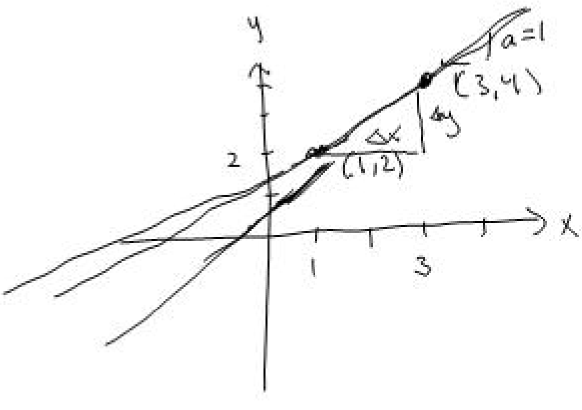
$\Delta x = x_2 - x_1$ — " — x

$$\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

formel for stigningstall a.

(Δ = delta)

Eks: Linjen l går gjennom $(1,2)$ $(3,4)$.



Stigningstall:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

Når $\Delta x = 1$, blir $\Delta y = a = 1$

Skjæringspunkt med y-aksen:

$$y = 1x + b = x + b$$

$$2 = 1 + b$$

$$b = 1$$

Likning for en rett linje:

$$\boxed{y = ax + b}$$

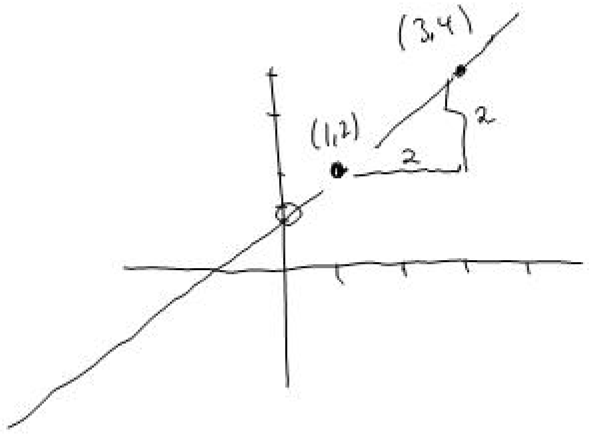
- a stigningstall
- b skjæringspunkt med y-aksen

Eks: $a = 1 \quad b = 1$

$\Rightarrow$ Linjen gjennom $(1,2)$ og $(3,4)$ har likning:

$$y = ax + b = x + 1$$

$$\underline{\underline{y = x + 1}}$$



$a = \frac{2}{2} = 1$

$b = 1$

Finner b ved regning:

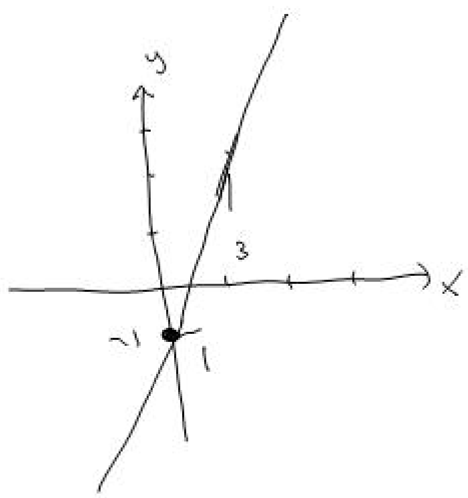
- $(1,2)$ ligger på linjen
- $y = ax + b$

$$2 = 1 \cdot 1 + b$$

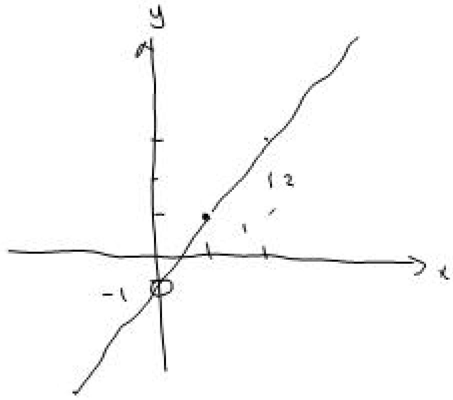
$$\underline{\underline{b = 1}}$$

Eks: Linjen l har likning

$y = \underline{3x - 1}$ $\quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$



Eks: Linja l går gjennom $(1,1)$ og har stigningstall $a=2$.



Likning til l:

$y = ax + b$

$\underline{a=2}$: $y = 2x + b$

$(1,1)$: $1 = 2 \cdot 1 + b$

$1 = 2 + b$

$b = \underline{-1}$

$\Bigg\}$ $y = \underline{\underline{2x-1}}$

Ettpunktsformelen:

Hvis linja l går gjennom (x_0, y_0) og har stigningstall a, så er likningen til l

$$\boxed{y - y_0 = a \cdot (x - x_0)}$$

Eks: $(x_0, y_0) = (1,1)$

$a = 2$

$y - 1 = 2 \cdot (x-1)$

$y - 1 = 2x - 2$

$y = \underline{\underline{2x-1}}$

Oppsummering:

* En rett linje har likning $\boxed{y = ax + b}$ der

a = stigningstall

b = skj. pkt. med y-aksen

* Formel for stigningstall:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* Ettpunktsformelen:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

Lineære funksjoner:

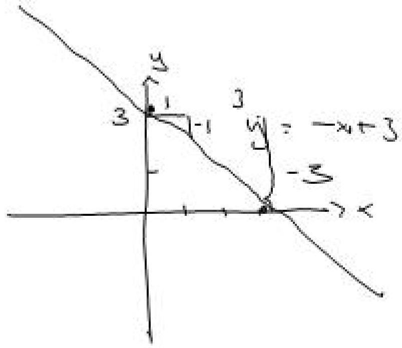
En funksjon f har rett linje som graf hvis og bare hvis

$$f(x) = a \cdot x + b \quad \text{(førstegradspolynom)}$$

Disse funksjonene kalles lineære funksjoner.

Eks: $f(x) = -x + 3$

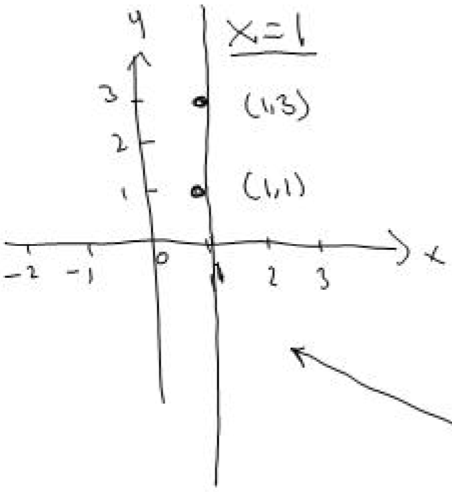
$\Rightarrow$ grafen er rett linje med $a = -1$, $b = 3$



$f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow$ grafen er ikke en rett linje

Vertikale linjer:



Likningen til en rett linje som er vertikal:

$$\boxed{x = c}$$

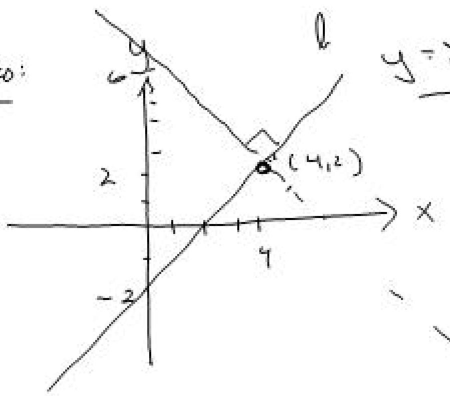
$x = c$ er ikke grafen til en funksjon.

Eks: $x = 1$

$$\left(a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty \right)$$

Normalen til en linje gjennom et punkt.

Eks:



$y = x - 2$

$l: y = x - 2$ har stigningstall 1

Normalen til linjen $y = x - 2$ gjennom $(4,2)$.

$n: y = -x + 6$

$$\boxed{y - y_0 = a \cdot (x - x_0)}$$

Ettpunktsformelen:

Finn likningen til n:

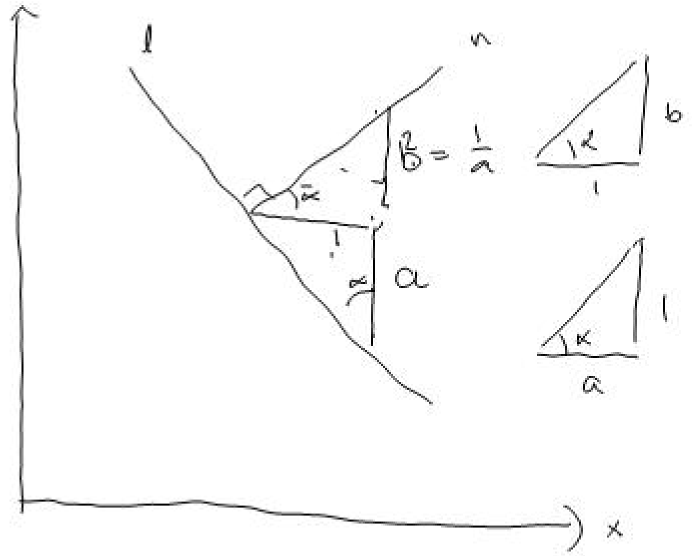
Går gjennom $(4,2)$

Stigningstall: $a = -\frac{1}{1} = -1$

Eks: $(y - 2) = -1 \cdot (x - 4)$

$y - 2 = -x + 4$

$y = \underline{-x + 6}$



$$\frac{b}{1} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{a}$$

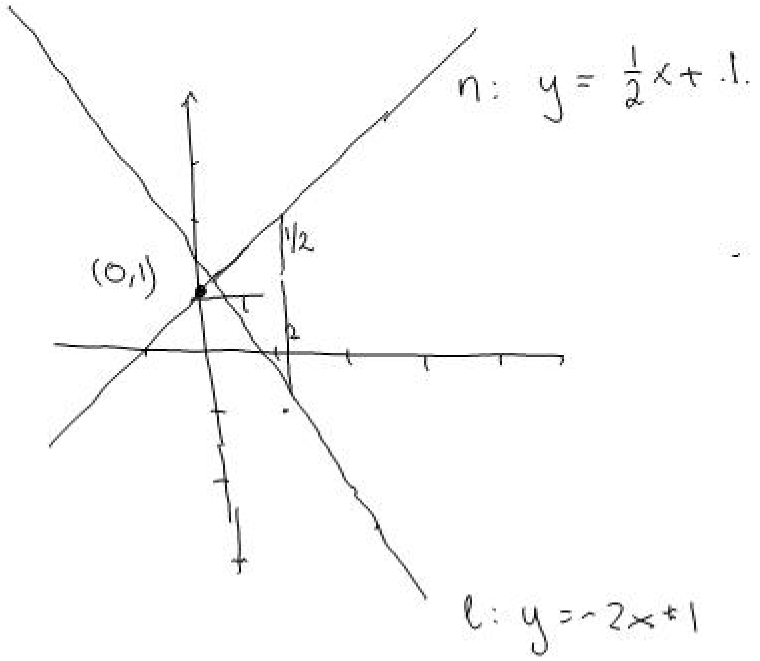
Generell formel:

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{a_l}}$$

a_l: stigningstall til l

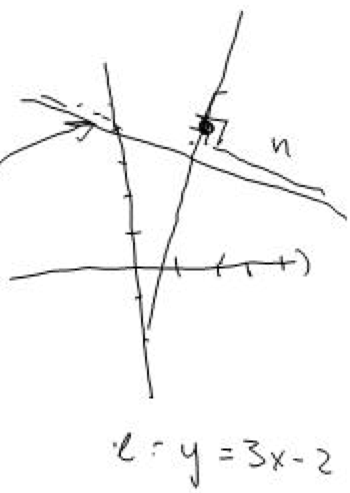
a_n: — " — til n

Eks: $y = -2x+1$



Eks: Finn normalen til $y = 3x-2$ i $(2,4)$.

n: $y = ax+b$ $\begin{cases} a = a_n \\ b \end{cases}$



$l: \quad y = 3x - 2$

$n: \quad y = ax + b = -\frac{1}{3}x + b$

① Regn ut a = a_n:

$$a = -\frac{1}{3}$$

② Regn ut b:

Vet at n går gjennom $(2,4)$.

Ettpunktsformelen:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

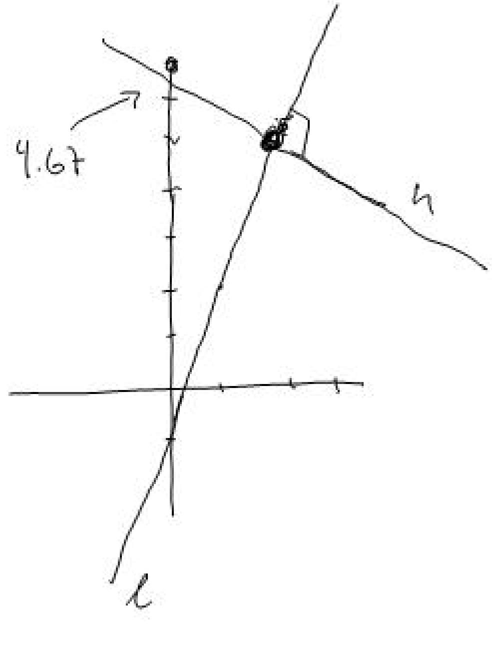
$$y - 4 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 2)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 4$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$

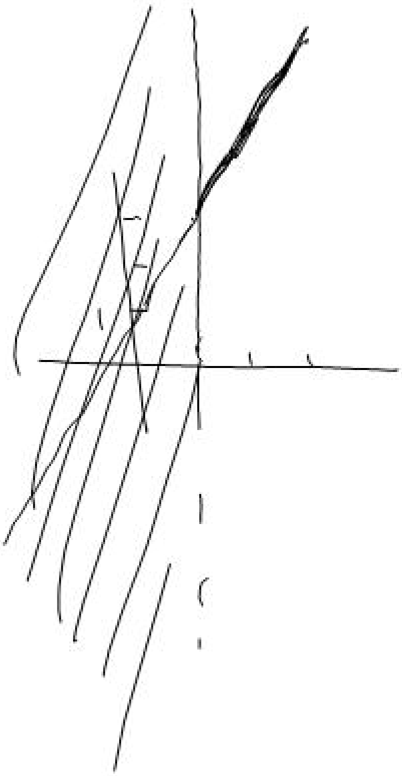
Altså: $b = \frac{14}{3} \approx 4.67$

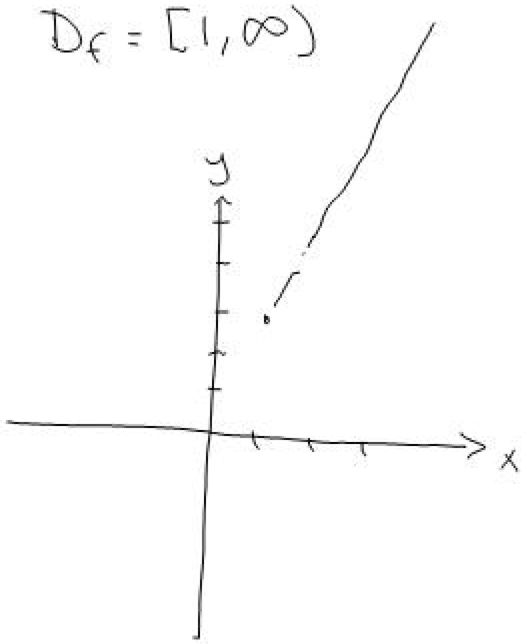


Eks:

$$f(x) = 2x+1, \quad x \geq 1$$

$$D_f = [1, \infty)$$





Eks:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$$

funksjon med delt forskrift

$\left\{ \text{funksjons-uttrykk} \right.$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $\qquad$ $f(0) = 0 + 2 = 2$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$