BI HANDELSHØYSKOLEN

Skriftlig eksamen:	ELE 37191		Matematikk valgfag	
Eksamensdato:	10.06.2014	kl.	09.00-14.00	Totalt antall sider: 4 inkl. vedlegg
				Antall vedlegg: 1 (2 sider)
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™			
Innføringsark:	Ruter			
	Teller 100 % av ELE 3719			Deloppgavene er vektet likt
				Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi

Oppgave 1

Vi betrakter matrisen *A* gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & t^2 & 3 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

for en konstant *t*.

a) Regn ut determinanten $|A|$. For hvilke verdier av t er de tre kolonnevektorene lineært uavhengige?

b) Finn alle egenverdiene til A når $t = 2$.

Oppgave 2

Vi betrakter funksjonen

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 + \frac{7}{2}x_2^{\ 2} - 12x_1 - 8x_2 + 50$$

a) Funksjonen f kan skrives på matriseform $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$. Skriv opp $\mathbf{x}, A, B$ og C.

b) Finn $\frac{df}{d\mathbf{x}}$. Vis at A er invertibel og finn det stasjonære punktet til $f(\mathbf{x})$.

Oppgave 3

La X og Y være to simultant fordelte stokastiske variable med sannsynlighetstetthet:

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy^2 + x^2 & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestem *k* og finn $E(X)$.

b) Hva blir sannsynlighetstetthetene $f_x(X)$ og $f_y(Y)$?

c) Er *X* og *Y* uavhengige? Begrunn svaret.

Oppgave 4

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse.

a) $y' = yt^2 + t^2$ $\quad y(0) = 2$

b) $y' + 4y = 4t$ $\quad y(0) = 2$

c) $y'' - 5y' + 6y = 4$ $\quad y(0) = \frac{5}{3}$ $\quad y(1) = \frac{2}{3}$

Oppgave 5

Et firma selger en bestemt type TV-apparat med 3 års garanti. Det er kjent at det vil oppstå minst en feil på 1 % av TV-apparatene i løpet av garantiperioden. Firmaet selger et parti med 200 TV-apparater. La X være antall TV-apparater i partiet der det oppstår minst en feil i løpet av garantiperioden.

a) Hva er sannsynligheten det oppstår minst en feil i løpet av garantiperioden på akkurat 3 av TV-apparatene-
   i) når du antar at X er binomisk fordelt?
   ii) når du antar at X er Poissonfordelt?

b) Anta at X er Poissonfordelt. Hva er sannsynligheten for at det oppstår minst en feil på færre enn 3 TV-apparater i løpet av garantiperioden?

Oppgave 6

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max/\min J(y) = \int_0^{\sqrt{3}} (\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 3y^2)\,dt \qquad \text{når } y(0) = 0,\ y(\sqrt{3}) = 1$$

a) Finn Euler-likningen for problemet og finn løsningen y^* av Euler-likningen som tilfredsstiller initialbetingelsene.

b) Undersøk om $F = \dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 3y^2$ er konveks eller konkav som en funksjon av $(y, \dot{y})$ og bruk dette til å bestemme om løsningen y^* av Euler-likningen maksimerer eller minimerer $J(y)$.

c) Finn den maksimale verdien av integralet om max-problemet har en løsning, evt. den minimale verdien av integralet om min-problemet har en løsning.

Oppgave 7

Estimer α og β i regresjonsmodellen $y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ og forklar hvorfor disse verdiene er optimale når:

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 119 & -25 \\ -25 & 6 \end{pmatrix}$$

Formelsamling

1 Sannsynlighetsregning

Noen viktige formler

a) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
b) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
c) $E(aX+b) = a\,E(X) + b$
d) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
e) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
f) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
g) $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) =$
$a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

Binomisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$ med $n \geq 1,\ 0 \leq p \leq 1$
b) $p(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ for $i = 0, \dots, n$
c) $E(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Geometrisk fordeling

a) $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ med $0 < p \leq 1$
b) $p(X=i) = p(1-p)^{i-1}$ for $i = 1, 2, \dots$
c) $E(X) = 1/p, \quad \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$

Poisson-fordeling

a) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $p(X=i) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$ for $i = 0, 1, 2, \dots$
c) $E(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$

Uniform fordeling

a) $X \sim \mathrm{Uniform}(a,b)$ med $a < b$
b) $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = (a+b)/2, \quad \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Eksponentialfordeling

a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ med $\lambda > 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$
c) $E(X) = 1/\lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Normalfordeling

a) $X \sim \mathrm{Normal}(\mu,\sigma)$ med $\sigma > 0$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
c) $E(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

2 Matrisemetoder

Partiell-derivasjon Funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$$

har partiell-deriverte gitt ved vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = (A + A^T)\mathbf{x} + B^T$$

Lineær regresjon En lineær regresjon med modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon$$

basert på et datasett (N observasjoner) gitt ved

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}$$

har beste tilpasning gitt ved vektoren

$$\beta = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y$$

forutsatt at $\det(X^T X) \neq 0$.

3 Differensiallikninger

Integrasjonsmetoder

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \,\mathrm{d}t = uv - \int uv' \,\mathrm{d}t$$

b) Substitusjonen $u = u(t)$:

$$\int f(u)u' \,\mathrm{d}t = \int f(u) \,\mathrm{d}u$$

Første ordens lineære differensiallikninger
En første ordens lineær differensiallikning

$$y' + a(t)y = f(t)$$

har løsning gitt ved

$$y = \frac{1}{u} \int f(t)u(t)\ \mathrm{d}t$$

der integrerende faktor $u = u(t)$ er gitt ved

$$u(t) = e^{\int a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Andre ordens lineære differensiallikninger
En andre ordens lineær differensiallikning

$$y'' + ay' + b = f(t)$$

har generell løsning $y = y_h + y_p$ der den homogene løsningen y_h er gitt hjelp av røttene av den karakteristiske likningen

$$r^2 + ar + b = 0$$

Vi har følgende tilfeller:

a) To røtter $r_1 \neq r_2$: $y_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
b) En dobbelrot r: $y_h = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$
c) Ingen røtter: $y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ der $\alpha = -a/2$ og $\beta = \sqrt{4b - a^2}/2$

Variasjonsregning Variasjonsproblemet

$$\max / \min J(y) = \int_a^b F(t, y, \dot{y})\ \mathrm{d}t$$

med initialbetingelsene $y(a) = y_0$ og $y(b) = y_1$ har Euler-likning

$$F'_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F'_{\dot{y}}) = 0$$