BI HANDELSHØYSKOLEN

Sensorveiledning:	ELE 37191	Matematikk valgfag			
Eksamensdato:	10.06.2014	kl.	09.00-14.00	Totalt antall sider:	6
Se oppgavesettet for tillatte hjelpemidler					
Se oppgavesettet for vekting av oppgavene					
Ansvarlig institutt: Institutt for samfunnsøkonomi					

Oppgave 1

a) Vi utvikler determinanten langs første rad:

$$|A| = t^2 - 3t - 4$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 4$$

De tre kolonnevektorene er lineært uavhengige når determinanten er forskjellig fra null, altså når $t \neq -1, 4$

b) $t = 2$ gir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenverdiene ved å løse likningen

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda)-6\big) - 4(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 6) = 0$$

Dette gir egenverdiene $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 6$

Oppgave 2

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{7}{2}x_2^2 - 12x_1 - 8x_2 + 50$$

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C$ der $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -12 & -8 \end{pmatrix}$, $C = 50$.

b) $$\frac{df}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 12 \\ 2x_1 + 7x_2 - 8 \end{pmatrix}$$

A er invertibel siden $|\mathbf{A}| = 7 - 1 = 6$. $f(\mathbf{x})$ har stasjonært punkt når

$$\frac{df}{d\mathbf{x}}=0 \Leftrightarrow 2\mathbf{Ax}+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x_1+2x_2-12 \\ 2x_1+7x_2-8 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x_1+2x_2-12 \\ 2x_1+7x_2-8 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{17}{6}, x_2=\frac{1}{3}$$

Oppgave 3

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy^2+x^2 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Bestemmer k ved å sette $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx=1$:

$$\int_0^1\int_0^1 kxy^2+x^2dydx=\int_0^1\left[\frac{1}{3}kxy^3+x^2y\right]_{y=0}^1 dx=\int_0^1\frac{1}{3}kx+x^2dx=\left[\frac{1}{6}kx^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^1=\frac{1}{6}k+\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}k+\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow k=4$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^1 4x^2y^2+x^3dydx=\int_0^1\left[\frac{4}{3}x^2y^3+x^3y\right]_{y=0}^1 dx=\int_0^1\frac{4}{3}x^2+x^3dx=\left[\frac{4}{9}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^1=\frac{25}{36}$$

b)

$$f_x(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_0^1 4xy^2+x^2dy=\left[\frac{4}{3}xy^3+x^2y\right]_{y=0}^1=\frac{4}{3}x+x^2$$

$$f_y(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 4xy^2+x^2dx=\left[2x^2y^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^1=2y^2+\frac{1}{3}$$

c) $f_x(X)\cdot f_y(Y)=\left(\frac{4}{3}x+x^2\right)\left(2y^2+\frac{1}{3}\right)\neq f(x,y)$. Dermed er X og Y avhengige.

Oppgave 4

a) $y'=yt^2+t^2$ $\qquad y(0)=2$

Likningen er separabel og kan skrives:

$$y'=yt^2+t^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y+1}=t^2$$

Vi får at

$$\int\frac{y'}{y+1}dy=\int t^2dt \Leftrightarrow \ln|y+1|=\frac{1}{3}t^3+C \Leftrightarrow y+1=e^{\frac{1}{3}t^3+C}=Ke^{\frac{1}{3}t^3}$$

Som gir generell løsning $y=Ke^{\frac{1}{3}t^3}-1$

Initialbetingelsen $y(0)=2$ gir: $2=K-1 \Leftrightarrow K=3$

Løsningen blir dermed $y = 3e^{\frac{1}{3}t^3} - 1$

b) $y' + 4y = 4t$ $y(0) = 2$

Vi multipliserer med integrerende faktor e^{4t} og får:

$$y' \cdot e^{4t} + 4y \cdot e^{4t} = 4t \cdot e^{4t} \Leftrightarrow \left(y \cdot e^{4t}\right)' = 4t \cdot e^{4t} \Leftrightarrow y \cdot e^{4t} = \int 4t \cdot e^{4t} dt = 4t \cdot \frac{1}{4} e^{4t} - \int 4 \cdot \frac{1}{4} e^{4t} dt = te^{4t} - \frac{1}{4} e^{4t} + C$$

Vi multipliser med e^{-4t} og får den generelle løsningen:

$$y = t - \frac{1}{4} + Ce^{-4t}$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir: $2 = -\frac{1}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{9}{4}$

Løsningen blir dermed $y = t - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} e^{-4t}$

c) $y'' - 5y' + 6y = 4$ $y(0) = \frac{5}{3}$ $y(1) = \frac{2}{3}$

Likningen er lineær av andre orden og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først y_h ved å løse den homogene likningen $y'' - 5y' + 6y = 0$. Den karakteristiske likningen er:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$$

Dette gir $y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. Vi finner den partikulære løsningen $y_p = A$ der A er en konstant. Det gir:

$$6A = 4 \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$$

Dermed er den generelle løsningen: $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{2}{3}$

Initialbetingelsen $y(0) = \frac{5}{3}$ gir at:

$$\frac{5}{3} = C_1 + C_2 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$$

Initialbetingelsen $y(1) = \frac{2}{3}$ gir at :

$$\frac{2}{3} = C_1 e^2 + (1 - C_1)e^3 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow C_1 + (1 - C_1)e = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{e}{e-1} \text{ og } C_2 = \frac{-1}{e-1}$$

Når vi setter inn for C_1 og C_2 får vi: $y = \frac{1}{e-1}(e^{2t+1} - e^{3t}) + \frac{2}{3}$

Oppgave 5

a)

i) Når X er binomisk fordelt:

$$n = 200,\ p = 0.01 \quad P(X=3) = \binom{200}{3} \cdot 0.01^3 \cdot 0.99^{197} = 0.1814$$

ii) Når X er Poissonfordelt:

$$\lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0.01 = 2 \quad P(X=3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0.1804$$

b) $$P(X<3) = \mathrm{P(X=0)} + \mathrm{P(X=1)} + \mathrm{PX=2)} = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 5e^{-2} = 0.6767$$

Oppgave 6

$$\max/\min J(y) = \int_0^{\sqrt{3}} (\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 3y^2)\,dt \quad \text{når } y(0)=0,\ y(\sqrt{3}) = 1$$

a) Vi har $F = \dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 3y^2$ med partielle deriverte:

$$F'_y = 2\dot{y} + 6y \text{ og } F'_{\dot{y}} = 2\dot{y} + 2y$$

Det gir Euler-likningen for problemet:

$$2\dot{y} + 6y - (2\ddot{y} + 2\dot{y}) = 0 \Leftrightarrow -2\ddot{y} + 6y = 0$$

Den karakteristiske likningen blir:

$$-2r^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -\sqrt{3}, r_2 = \sqrt{3}$$

Vi får :

$$y = C_1 e^{-\sqrt{3}\cdot t} + C_2 e^{\sqrt{3}\cdot t}$$

Initialbetingelsene gir:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow y = C_1 e^{-\sqrt{3}\cdot t} - C_1 e^{\sqrt{3}\cdot t}$$
$$y(\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 e^{-3} - C_1 e^3 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e^{-3} - e^3}$$

Løsningen y^* av Euler-likningen blir dermed:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow y = C_1 e^{-\sqrt{3}\cdot t} - C_1 e^{\sqrt{3}\cdot t}$$
$$y(\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 e^{-3} - C_1 e^3 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e^{-3} - e^3}$$
$$y = \frac{1}{e^{-3} - e^3}(e^{-\sqrt{3}\cdot t} - e^{\sqrt{3}\cdot t})$$

b) $F''_{yy} = 6, F''_{\dot{y}\dot{y}} = 2, F''_{y\dot{y}} = 2 \Rightarrow F''_{yy} > 0, F''_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ og $F''_{yy} \cdot F''_{\dot{y}\dot{y}} - \left(F''_{y\dot{y}}\right)^2 = 8 > 0$

Dermed er $F = \dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 3y^2$ konveks som en funksjon av $(y, \dot{y})$ og løsningen y^* av Euler-likningen minimerer $J(y)$.

c) Den minimale verdien av integralet om min-problemet er:

$$y = \frac{1}{e^{-3} - e^{3}}(e^{-\sqrt{3}\cdot t} - e^{\sqrt{3}\cdot t}) = K(e^{-\sqrt{3}\cdot t} - e^{\sqrt{3}\cdot t}) \ der\ K = \frac{1}{e^{-3} - e^{3}} \Rightarrow \dot{y} = K(-\sqrt{3}\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t} - \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t})$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} (\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 3y^2)dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (K^2(-\sqrt{3}\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t} - \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t})^2 + 2K(e^{-\sqrt{3}\cdot t} - e^{\sqrt{3}\cdot t})K(-\sqrt{3}\cdot e^{-\sqrt{3}\cdot t} - \sqrt{3}\cdot e^{\sqrt{3}\cdot t}) + 3K^2(e^{-\sqrt{3}\cdot t} - e^{\sqrt{3}\cdot t})^2)dt$$

$$= K^2 \int_0^{\sqrt{3}} ((3e^{-2\sqrt{3}\cdot t} + 6 + 3e^{2\sqrt{3}\cdot t}) + 2(-\sqrt{3}\cdot e^{-2\sqrt{3}\cdot t} - \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot t}) + 3(e^{-2\sqrt{3}\cdot t} - 2 + e^{2\sqrt{3}\cdot t}))dt$$

$$= K^2 \int_0^{\sqrt{3}} ((6 - 2\sqrt{3})e^{-2\sqrt{3}\cdot t} + (6 + 2\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot t})dt = K^2(6 - 2\sqrt{3})\int_0^{\sqrt{3}} e^{-2\sqrt{3}\cdot t}dt + K^2(6 + 2\sqrt{3})\int_0^{\sqrt{3}} e^{2\sqrt{3}\cdot t}dt$$

$$= K^2(6 - 2\sqrt{3})\left[\frac{1}{-2\sqrt{3}}e^{-2\sqrt{3}\cdot t}\right]_0^{\sqrt{3}} + K^2(6 + 2\sqrt{3})\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{2\sqrt{3}\cdot t}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= K^2(6 - 2\sqrt{3})\left(\frac{1}{-2\sqrt{3}}e^{-6} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + K^2(6 + 2\sqrt{3})\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= (\sqrt{3} - 1)\frac{-e^{-6} + 1}{\left(e^{-3} - e^{3}\right)^2} + (\sqrt{3} + 1)\frac{e^{6} - 1}{\left(e^{-3} - e^{3}\right)^2} = 2.74$$

Oppgave 7

Vi skal estimere:

$\boldsymbol{\beta} = (X^T X)^{-1}(X^T Y)$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 156 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{89}\begin{pmatrix} 119 & -25 \\ -25 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 31 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.37 \\ 1.81 \end{pmatrix}$$

På matriseform kan regresjonslikningen skrives:

$\mathbf{Y} = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ som gir $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}$ der $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6)$. Vi ønsker å finne $\boldsymbol{\beta}$ slik at $E = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ blir minst mulig. Siden $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}$ får vi:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{y} - \mathbf{x\beta})^{\mathbf{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{x\beta}) = (\mathbf{y}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{T}})(\mathbf{y} - \mathbf{x\beta}) = \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} - \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x\beta} + \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x\beta}$$
$$= \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} - (\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y})^{\mathbf{T}} - \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x\beta} + \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x\beta} + \mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$$

(som er på formen $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}$ med $\mathbf{A} = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}, \mathbf{B} = 2\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$)

Vi setter den deriverte med hensyn på $\boldsymbol{\beta}$ lik null:

$$\mathbf{2X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{2y}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{\mathbf{T}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$$

Som er minimal fordi $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ er positiv definit.