BI HANDELSHØYSKOLEN

Skriftlig eksamen:	**ELE 37191**	**Matematikk valgfag**		
Eksamensdato:	27.11.2013	09:00 – 14:00	Totalt antall sider:	4 inkl. vedlegg
			Antall vedlegg:	1 (2 sider)
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator			
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus			
Innføringsark:	Ruter			
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt	
Kontinuasjonseksamen			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi	

Oppgave 1.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & s \\ 1 & 2 & s^2 \\ 1 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Regn ut $\det(A)$. For hvilke verdier av s er matrisen A inverterbar?

(b) Vi skal gjøre en lineær regresjon med modell $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ basert på de fire datapunktene

$$(y, x_1, x_2) = (1, 0, 0),\ (2, 1, 0),\ (-1, 0, -1),\ (8, 1, 1)$$

Finn beste tilpasning $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

Oppgave 2.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x_1, x_2, x_3) = 8 + 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2$$

(a) Skriv funksjonen f på matriseform $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$, og bruk dette til å finne de stasjonære punktene til f.

(b) Vis at $\lambda = -1$ er en egenverdi for A.

(c) Avgjør om den kvadratiske formen $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit. Bruk dette til klassifisere eventuelle stasjonære punktene som maksimum-, minimum- eller sadelpunkter.

Oppgave 3.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

(a) $y' + 2y = 6, \quad y(0) = 2$

(b) $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

Oppgave 4.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^3+y^3), & 0 \le x \le 1 \text{ og } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en positiv konstant k.

(a) Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
(b) Regn ut $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
(c) Regn ut $E(XY)$ og $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
(d) Er X og Y uavhengige stokastiske variable? Begrunn svaret.

Oppgave 5.

Et produksjonsanlegg har to produksjonssystemer, System A og B. Antall feil per uke i System A og B er to uavhengige Poisson-fordelte stokastiske variable, henholdsvis X og Y, med parametre $\lambda_X = 1.4$ og $\lambda_Y = 1.1$.

(a) Finn sannsynlighet for 2 feil i System A og 1 feil i System B i løpet av en uke. Finn også sannsynligheten for at det oppstår feil i minst ett av de to systemene i løpet av en uke.
(b) Finn sannsynligheten for at det oppstår fire feil i løpet av en uke.
(c) Finn et uttrykk for $p(X+Y=n)$, og bruk dette til å vise at $X+Y$ er Poisson-fordelt.

Oppgave 6.

Vi betrakter variasjonsproblemet

$$\max/\min \int_0^3 \ln(6-2y+2\dot{y})\,\mathrm{d}t \quad \text{når} \quad y(0)=-3,\ y(3)=3+18e^3$$

(a) Finn Euler-likningen for dette problemet, og finn løsningen y^* av Euler-likningen som også tilfredsstiller initialbetingelsene.
(b) Undersøk om $F = \ln(6-2y+2\dot{y})$ er konveks eller konkav som funksjon i $(y,\dot{y})$. Bruk dette til å avgjøre om y^* gir max eller min i variasjonsproblemet.