BI HANDELSHØYSKOLEN

Sensorveiledning:	**ELE 37191**	**Matematikk valgfag**		
Eksamensdato:	27.11.2013	09:00 – 14:00	Totalt antall sider:	4
			Antall vedlegg:	0
Tillatte hjelpemidler:	BI-definert eksamenskalkulator			
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus			
Innføringsark:	Ruter			
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt	
Kontinuasjonseksamen			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi	

Oppgave 1.

(a) Vi utvikler determinanten langs første kolonne og dette gir

$$\det(A) = -1(9+6s) + 1(s^2 - 2s) = s^2 - 8s - 9$$

Vi vet at A er inverterbar når $\det(A) \neq 0$. Siden $\det(A) = 0$ for $s = 9$ og $s = -1$, er A inverterbar for $s \neq 9, -1$.

(b) Med utgangspunkt i de tre datapunktene definerer vi X og $\mathbf{y}$ ved

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vi regner ut $X^T X$ og $X^T \mathbf{y}$, og finner at

$$X^T X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\det(X^T X) = 4 \neq 0$, så beste tilpasning er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T \mathbf{y}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Altså er den beste tilpasningen $y = 2 + x_1 + 4x_2$.

Oppgave 2.

(a) Vi velger matrisen A symmetrisk, og får dermed at $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c$ der

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad c = 8$$

De stasjonære punktene er gitt ved $\partial f/\partial \mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + B^T = \mathbf{0}$, og dette gir

$$2A\mathbf{x} = -B^T \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi finner disse ved å løse det lineære likningssystemet, for eksempel ved hjelp av Gauss-eliminasjon, og får

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

(b) Vi regner ut egenverdiene til A for å klassifisere den kvadratiske formen, og får

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3) - 1(-2-\lambda+1) + 1(-1+2+\lambda) = 0$$

Dette gir egenverdier

$$(-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3) + 2(\lambda+1) = 0$$

Vi ser at $\lambda = -1$ er en egenverdi siden $(\lambda + 1)$ er en felles faktor.

(c) Vi regner ut de andre egenverdiene ved $(-2-\lambda)(\lambda+3)+2 = 0$, som gir $-\lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$, og dermed

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \frac{5 \pm 3}{-2}$$

Alle egenverdier er dermed negative, og A er negativ definit. Det betyr at det stasjonære punktet er et (globalt) maksimumspunkt.

Oppgave 3.

(a) Differensiallikningen $y' + 2y = 6$ er både separabel og lineær, og vi velger å løse den som en lineær differensiallikning på standard form $y' + 2y = 6$ med integrerende faktor e^{2t}, slik at

$$(ye^{2t})' = 6e^{2t} \quad \Rightarrow \quad ye^{2t} = 3e^{2t} + \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad y = 3 + \mathcal{C}e^{-2t}$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = 3 + C$ eller $C = -1$, og løsningen blir derfor $y = 3 - e^{-2t}$.

(b) Differensiallikningen $y'' - 4y' + 3y = 0$ er andre ordens lineær og homogen, og har løsning $y = y_h$. Den karakteristisk likingen er $r^2 - 4r + 3 = 0$, og har løsning $r = 1$ og $r = 3$, så den homogene løsningen er $y_h = C_1e^t + C_2e^{3t}$. Initialbetingelsene $y(0) = 2, y'(0) = 4$ gir $C_1 + C_2 = 2$ og $C_1 + 3C_2 = 4$, som har løsning $C_1 = 1$ og $C_2 = 1$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{e^t} + \mathbf{e^{3t}}$$

Oppgave 4.

(a) La oss først regne ut $f_X(x)$ for $0 \leq x \leq 1$, som er gitt ved

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^3 + y^3)\ \mathrm{d}y = k\left[x^3 y + y^4/4\right]_0^1 = k(x^3 + 1/4)$$

Konstanten k må oppfylle likningen

$$\int_0^1 f_X(x)\ \mathrm{d}x = k\left[x^4/4 + x/4\right]_0^1 = k(1/2) = 1$$

Dette gir at $k = 2$. Dermed er $f_X(x) = 2x^3 + 1/2 = 1/2(4x^3 + 1)$.

(b) Vi regner ut $E(X)$ og $E(X^2)$ ved å bruke $f_X(x)$:

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^4 + x)/2\ \mathrm{d}x = 1/2\left[4x^5/5 + x^2/2\right]_0^1 = 1/2(4/5 + 1/2) = 13/20$$

og

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^5 + x^2)/2\ \mathrm{d}x = 1/2\left[4x^6/6 + x^3/3\right]_0^1 = 1/2$$

Dette gir $\mathrm{Var}(X) = 1/2 - (13/20)^2 = (200 - 169)/400 = 31/400$.

(c) Vi regner ut $E(XY)$ ved å bruke $f(x,y)$:

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy f(x,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \int_0^1 x^4 y + xy^4\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Vi har indre integral

$$\int_0^1 x^4 y + xy^4 \mathrm{d}y = \left[x^4 y^2/2 + xy^5/5\right]_0^1 = x^4/2 + x/5$$

Dette gir

$$E(XY) = 2\int_0^1 x^4/2 + x/5\, \mathrm{d}x = 2\left[x^5/10 + x^2/10\right]_0^1 = 4/10 = 2/5$$

Dermed er $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2/5 - (13/20)\cdot(13/20) = (160 - 169)/400 = -9/400$ siden $E(X) = E(Y)$ ved symmetri.

(d) Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variable, så er $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ og dette er ikke tilfellet. Dermed er X og Y ikke uavhengige.

Oppgave 5.

(a) Sannsynlighet for x feil i System A og y i B i løpet av en uke er gitt ved

$$f(x,y) = e^{-1.4}1.4^x/x! \cdot e^{-1.1}1.1^y/y! = e^{-2.5}\cdot\frac{1.4^x 1.1^y}{x!\cdot y!}$$

Sannsynlighet for 2 feil i System A og 1 i B i løpet av en uke blir dermed

$$f(2,1) = e^{-2.5}\cdot\frac{1.4^2 1.1^1}{2!\cdot 1!} = 0.0885$$

siden X og Y er uavhengige og Poisson-fordelte. Sannsynligheten for at det oppstår minst en feil er

$$1 - f(0,0) = 1 - e^{-2.5} \cong 0.918$$

(b) Sannsynligheten for at det oppstår 4 feil i løpet av en uke er gitt ved

$$f(0,4) + f(1,3) + f(2,2) + f(3,1) + f(4,0) =$$
$$e^{-2.5}\cdot(\frac{1.1^4}{24} + \frac{1.4\cdot 1.1^3}{6} + \frac{1.4^2 1.1^2}{4} + \frac{1.4^3\cdot 1.1}{6} + \frac{1.4^4}{24} = 0.134$$

(c) Vi har at $p(X+Y=n)$ kan uttrykkes som

$$f(0,n)+f(1,n-1)+\cdots+f(n,0)=\sum_{i=0}^{n} f(i,n-i)=\sum_{i=0}^{n} e^{-2.5}\frac{1.4^i 1.1^{n-i}}{i!(n-i)!}$$

Vi setter $Z=X+Y$. Dette betyr at sannsynligheten

$$p(Z=n)=e^{-2.5}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{1.4^i 1.1^{n-i}}{i!(n-i)!}$$

Vi vil forsøke å vise at Z er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Z=2.5$. Vi bruker Poisson fordelingen, og ser at vi må vise at

$$p(Z=n)=e^{-2.5}\cdot\frac{2.5^n}{n!}=e^{-2.5}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{1.4^i 1.1^{n-1}}{i!(n-i)!}$$

Med andre ord, vi må vise at

$$\frac{2.5^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1.4^i 1.1^{n-i}}{i!(n-i)!}\quad\Leftrightarrow\quad 2.5^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}1.4^i 1.1^{n-i}$$

Men binomial-formelen sier at

$$2.5^n=(1.4+1.1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1.4^i 1.1^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot 1.4^i 1.1^{n-i}$$

og dermed har vi vist at $Z=X+Y$ er Poisson-fordelt med $\lambda_Z=2.5$.

Oppgave 6.

(a) Vi har $F=\ln(6-2y+2\dot{y})$ og dette gir partiell-deriverte

$$F'_y=\frac{-2}{6-2y+2\dot{y}},\quad F'_{\dot{y}}=\frac{2}{6-2y+2\dot{y}}$$

Dermed er Euler-likningen for problemet gitt ved

$$\frac{-2}{6-2y+2\dot{y}}-\frac{4\dot{y}-4\ddot{y}}{(6-2y+2\dot{y})^2}=0\quad\Leftrightarrow\quad -2(6-2y+2\dot{y})-(4\dot{y}-4\ddot{y})=0$$

Etter at vi forenkler likningen, får vi $4\ddot{y}-8\dot{y}+4y=12$. Den karakteristiske likningen er $4r^2-8r+4=0$ med dobbelrot $r=1$, og dermed er den generelle løsningen av Euler-likningen gitt ved $y=y_h+y_p=(C_1+C_2t)e^t+3$. Initialbetingelsene $y(0)=-3$ og $y(3)=3+18e^3$ gir at $C_1+3=-3$, eller $C_1=-6$, og $(-6+3C_2)e^3+3=3+18e^3$, eller $C_2=8$. Dette betyr at løsningen $y^*=(-6+8t)e^t+3$ tilfredsstiller Euler-likningen og initialbetingelsene.

(b) Vi har andre orden partiellderiverte gitt ved

$$F''_{yy}=\frac{-4}{(6-2y+2\dot{y})^2},\quad F''_{y\dot{y}}=\frac{4}{(6-2y+2\dot{y})^2},\quad F''_{\dot{y}\dot{y}}=\frac{-4}{(6-2y+2\dot{y})^2}$$

Vi har dermed $F''_{yy},F''_{\dot{y}\dot{y}}<0$ for all $(y,\dot{y})$, and

$$F''_{yy}\cdot F''_{\dot{y}\dot{y}}-(F''_{y\dot{y}})^2=0$$

og F er derfor konkav i $(y,\dot{y})$. Dette betyr at y^* gir et maksimum i variasjonsproblemet.