BI HANDELSHØYSKOLEN

Skriftlig eksamen:	**MET 22141**	**Matematikk valgfag**	
Eksamensdato:	26.11.2012	09:00 – 14:00	Totalt antall sider: 2
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler inkludert BI-definert eksamenskalkulator TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus		
Innføringsark:	Ruter		
	Teller 100% av MET 2214		Deloppgavene er vektet likt
Kontinuasjon			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi

Oppgave 1.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-2y)^2 + ky^2, & 0 \le x \le 1 \text{ og } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en konstant $k \ge 0$.

(a) Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
(b) Regn ut $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
(c) Regn ut $E(XY)$.
(d) Finn den kumulative fordelingsfunksjonen $F(a,b) = p(X \le a, Y \le b)$, og regn ut $F(1,1)$.

Oppgave 2.

La X og Y være simultant fordelte diskrete stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$p(X=-1, Y=1) = 2a \qquad p(X=-1, Y=2) = 0.3 \qquad p(X=-1, Y=3) = 0.1$$
$$p(X=1, Y=1) = 0.1 \qquad p(X=1, Y=2) = b \qquad p(X=1, Y=3) = 0.1$$

for konstanter $a, b \ge 0$. Vi antar at $p(X=x, Y=y) = 0$ for alle andre verdier av x og y.

(a) Forklar hvorfor $b = 0.4 - 2a$, og finn uttrykk for $E(X)$ og $E(Y)$ som funksjoner av a.
(b) Regn ut $\mathrm{Cov}(X,Y)$. For hvilken verdi av a er kovariansen størst mulig?
(c) Er X og Y uavhengige for noen verdier av a?

Oppgave 3.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a-2 & 2 \\ 4 & 2a & 0 \\ 1 & a-1 & 1 \end{pmatrix}$$

for en konstant a.

(a) Regn ut $\det(A)$. Er de tre kolonnevektorene i A lineært uavhengige?
(b) Finn alle egenverdiene til A når $a = 3/2$.

Oppgave 4.

Vi betrakter den kvadratiske formen Q gitt ved

$$Q(x, y, z) = 2xz - 2y^2 + 3z^2$$

(a) Regn ut vektoren $\partial Q/\partial \mathbf{x}$ av første ordens partielle deriverte til den kvadratiske formen Q, og finn alle stasjonære punkter for Q.
(b) Avgjør om Q er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit.

Oppgave 5.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

(a) $y - y' = 1, \quad y(0) = 3$
(b) $y' - ty = y, \quad y(-2) = 5$
(c) $y'' = y', \quad y(0) = 7, y'(0) = 4$

Oppgave 6.

Vi betrakter det diskonterte variasjonsproblemet

$$\max \int_0^1 \left(4ye^{-t} - 5y^2 - \dot{y}^2\right) e^{-4t}\,\mathrm{d}t \quad \text{når} \quad y(0) = 5/3,\ y(1) = 2e^{-1}$$

(a) Bestem Euler-likningen til variasjonsproblemet, og finn en partikulær løsning av Euler-likningen på formen $y_p = Ate^{-t}$.
(b) Løs variasjonsproblemet.