BI HANDELSHØYSKOLEN

Sensorveiledning:	**MET 22141**	**Matematikk valgfag**	
Eksamensdato:	26.11.2012	09:00 – 14:00	Totalt antall sider: 4
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler inkludert BI-definert eksamenskalkulator TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus		
Innføringsark:	Ruter		
	Teller 100% av MET 2214		Deloppgavene er vektet likt
Kontinuasjon			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi

Oppgave 1.

(a) Vi regner først ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon, og får at

$$f_X(x) = \int_0^1 (x-2y)^2 + ky^2 \,\mathrm{d}y = \left[x^2y - 2xy^2 + \frac{4+k}{3}y^3\right]_0^1 = x^2 - 2x + \frac{4+k}{3}$$

Men f er en sannsynlighetstetthet, så vi har at

$$\int_0^1 x^2 - 2x + (k+4)/3 \,\mathrm{d}x = \left[x^3/3 - x^2 + (k+4)x/3\right]_0^1 = 1/3 - 1 + (k+4)/3 = 1$$

Dette gir $\mathbf{k = 1}$. Dermed følger det at $f_X(x) = \mathbf{x^2 - 2x + 5/3}$.

(b) Vi bruker $f_X(x) = x^2 - 2x + 5/3$ og finner $E(X)$ ved å løse integralet

$$E(X) = \int_0^1 x(x^2 - 2x + 5/3)\,\mathrm{d}x = \left[x^4/4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$ ved å løse integralet

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(x^2 - 2x + 5/3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{5}{9}x^3\right]_0^1 = \frac{23}{90}$$

Dermed blir

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{23}{90} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \mathbf{\frac{59}{720}}$$

(c) Vi bruker $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2$, og regner ut $E[XY]$ ved å løse integralet

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (x^2 - 4xy + 5y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 (x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[x^3y^2/2 - \frac{4}{3}x^2y^3 + \frac{5}{4}xy^4\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{4}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{5}{8}x^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{11}{36}}
\end{aligned}$$

(d) Vi regner ut den kumulative fordelingen $F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$ for $0 \leq a \leq 1$ og $0 \leq b \leq 1$ ved å regne ut integralet

$$\begin{aligned}
P(X \leq a, Y \leq b) &= \int_0^a \int_0^b x^2 - 4xy + 5y^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left[x^2y - 2xy^2 + \frac{5}{3}y^3\right]_0^b \mathrm{d}x = \int_0^a x^2b - 2xb^2 + \frac{5}{3}b^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3b - x^2b^2 + \frac{5}{3}xb^3\right]_0^a = \mathbf{\frac{1}{3}a^3b - a^2b^2 + \frac{5}{3}ab^3}
\end{aligned}$$

Vi har at $F(1,1) = 1/3 - 1 + 5/3 = \mathbf{1}$.

Oppgave 2.

(a) Siden summen av sannsynlighetene er 1, har vi at

$$2a + 0.3 + 0.1 + 0.1 + b + 0.1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 0.4 - 2a}$$

Vi bruker derfor at $b = 0.4 - 2a$ i resten av oppgaven. Forventningsverdiene er gitt ved

$$\begin{aligned}
E(X) &= -1 \cdot (2a + 0.3 + 0.1) + 1 \cdot (0.1 + b + 0.1) = b - 2a - 0.2 = \mathbf{0.2 - 4a} \\
E(Y) &= 1 \cdot (0.1 + 2a) + 2 \cdot (b + 0.3) + 3 \cdot 0.20 = 2a + 2b + 1.30 = \mathbf{2.1 - 2a}
\end{aligned}$$

(b) Vi har at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, og vi regner ut forventningsverdien

$$E(XY) = -1 \cdot (2a) + (-2) \cdot 0.3 + (-3) \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot b + 3 \cdot 0.1) = 0.3 - 6a$$

Dette gir kovarians $\mathrm{Cov}(X,Y) = (0.3 - 6a) - (0.2 - 4a)(2.1 - 2a) = \mathbf{-8a^2 + 2.8a - 0.12}$. Siden $0 \leq a \leq 0.2$, så har vi at variansen er størst mulig når $-16a + 2.8 = 0$, og dermed for $\mathbf{a = 0.175}$.

(c) Hvis X og Y er uavhengige, så er kovariansen $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, dvs at $-8a^2 + 2.8a - 0.12 = 0$. Den eneste løsningen med $0 \leq a \leq 0.2$ er $a = 0.05$. Vi må derfor sjekke om X og Y er uavhengige for $a = 0.05$. Vi har $p(X = -1) = 0.5$ og $p(X = 1) = 0.5$, og $p(Y = 1) = 0.2$, $p(Y = 2) = 0.6$ og $p(Y = 3) = 0.2$. Dermed ser vi at $p(X = x) \cdot p(Y = y) = p(X = x, Y = y)$ for alle verdier av x og y, og X og Y er **uavhengige** for $a = 0.05$.

Oppgave 3.

(a) Vi regner ut $\det(A)$ ved å utvikle determinanten langs tredje kolonne:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a-2 & 2 \\ 4 & 2a & 0 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4(a-1) - 2a) + 1 \cdot (3(2a) - 4(a-2)) = \mathbf{6a}$$

Vi ser kolonnevektorene er lineært uavhengige for $\mathbf{a \neq 0}$ og lineært avhengige for $a = 0$, siden $|A| = 0$ hvis og bare hvis $a = 0$.

(b) Vi finner egenverdiene til A når $a = 3/2$ ved å løse den karakteristiske likningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi har at

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & a-2 & 2 \\ 4 & 2a-\lambda & 0 \\ 1 & a-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 2(4(a-1) - (2a-\lambda)) + (1-\lambda)((3-\lambda)(2a-\lambda) - 4(a-1))$$

så den karakteristiske likningen for $a = 3/2$ blir

$$(2\lambda - 2) + (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 11) = 0$$

Siden $(1-\lambda)$ er felles faktor, kan likningen skrives som $(1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$, og dette gir $\lambda = 1$ eller $\lambda = 3$. Egenverdiene til A når $a = 3/2$ er gitt ved $\lambda_1 = \mathbf{1}, \lambda_2 = \lambda_3 = \mathbf{3}$.

Oppgave 4.

(a) Vektoren $\partial Q/\partial \mathbf{x}$ av første ordens partielle deriverte til Q er gitt ved $2A\mathbf{x}$, hvor A er den symmetriske matrisen til Q. Vi finner at A og den deriverte vektoren er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

De stasjonære punktene til Q er gitt ved $2A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og den eneste løsningen av denne likningen er $\mathbf{x} = (A^{-1}\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ siden vi har

$$|A| = 2 \neq 0$$

De stasjonære punktene for Q er derfor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Vi avgjør om Q er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit ved å se på fortegnene til egenverdiene til A. Den karakteristiske likningen er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1) = 0$$

og egenverdiene er derfor gitt ved $\lambda = -4$ og $\lambda = (3 \pm \sqrt{13})/2$. Siden A har både positive og negative egenverdier, så er Q **indefinit**.

Oppgave 5.

(a) Differensiallikningen $y - y' = 1$ lineær, og kan skrives som $y' - y = -1$. Den har derfor integrerende faktor $u = e^{-t}$, og vi har

$$(ye^{-t})' = -e^{-t} \quad \Rightarrow \quad ye^{-t} = e^{-t} + \mathcal{C}$$

Dette gir $y = 1 + \mathcal{C}e^t$, og initialbetingelsen $y(0) = 3$ gir $\mathcal{C} = 2$. Dermed har vi løsningen

$$y = \mathbf{1 + 2e^t}$$

(b) Differensiallikningen $y' - ty = y$ er separabel, og kan skrives som $y' = y + ty = y(1+t)$, eller

$$\frac{1}{y}y' = 1 + t \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = t + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{C}'$$

Dette gir $y = \mathcal{C}e^{t+t^2/2}$ med $\mathcal{C} = \pm e^{\mathcal{C}'}$. Initialbetingelsen $y(-2) = 5$ gir $5 = \mathcal{C}e^0$, som gir $\mathcal{C} = 5$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{5e^{t+t^2/2}}$$

(c) Differensiallikningen $y'' = y'$ er andre ordens lineær homogen, og kan skrives $y'' - y' = 0$. Den har karakteristisk likning $r^2 - r = 0$, med løsning $r = 0$ og $r = 1$, så den generelle løsningen er $y = C_1e^0 + C_2e^t = C_1 + C_2e^t$. Initialbetingelsene $y(0) = 7, y'(0) = 4$ gir $C_1 + C_2 = 7$ og $C_2 = 4$, som har løsning $C_1 = 3$ og $C_2 = 4$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{3 + 4e^t}$$

Oppgave 6.

(a) Vi bruker $F(t, y, \dot{y}) = \left(4ye^{-t} - 5y^2 - \dot{y}^2\right)e^{-4t}$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = (4e^{-t} - 10y)e^{-4t}, \quad F'_{\dot{y}} = (-2\dot{y})e^{-4t}$$

Euler-likningen blir da:

$$F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = (4e^{-t} - 10y)e^{-4t} - (-2\ddot{y})e^{-4t} - (-2\dot{y})(-4)e^{-4t} = 0$$

Forenkling gir likningen $(2\ddot{y} - 8\dot{y} - 10y + 4e^{-t})e^{-4t} = 0$, eller $\ddot{y} - 4\dot{y} - 5y = -2e^{-t}$. Euler-likningen er dermed annenordens lineær og inhomogen. For å finne en partikulærløsning av formen $y = Ate^{-t}$, setter vi inn y, $y' = A(1-t)e^{-t}$ og $y'' = A(t-2)e^{-t}$ inn i Euler-likninen, og finner $A(t-2) - 4A(1-t) - 5At = -2$, som gir $A = 1/3$. Dette gir partikulærløsningen

$$y_p = \frac{1}{3}te^{-t}$$

(b) Den generelle løsningen av Euler-likningen er $y = y_h + y_p$. Siden den karakteristiske likningen er $r^2 - 4r - 5 = 0$, så er

$$y = y_h + y_t = C_1e^{-t} + C_2e^{5t} + \frac{1}{3}te^{-t}$$

Setter vi inn initialbetingelsene $y(0) = 5/3$ og $y(1) = 2e^{-1}$, får vi at $C_1 + C_2 = 5/3$ og $C_1e^{-1} + C_2e^5 + 1/3e^{-1} = 2e^{-1}$, og dette gir $C_2 = 0$ og $C_1 = 5/3$. Siden F er konkav som funksjon i $(y, \dot{y})$, er derfor

$$y = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} = \frac{5+t}{3}e^{-t}$$

løsning av variasjonsproblemet.