BI HANDELSHØYSKOLEN

Skriftlig eksamen:	**ELE 37191**	**Matematikk valgfag**	
Eksamensdato:	14.06.2012	09:00 – 14:00	Totalt antall sider: 2
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler inkludert BI-definert eksamenskalkulator		
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus		
Innføringsark:	Ruter		
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt
			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi

Oppgave 1.

La X og Y være simultant fordelte kontinuerlige stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + k(x-y)^2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ og } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

for en konstant $k \geq 0$.

(a) Bestem k. Hva blir sannsynlighetstettheten $f_X(x)$?
(b) Regn ut $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.
(c) Regn ut $E(XY)$.
(d) Finn den kumulative fordelingsfunksjonen $F(a,b) = p(X \leq a, Y \leq b)$, og regn ut $F(1,1)$.

Oppgave 2.

La X og Y være simultant fordelte diskrete stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$p(X=1, Y=1) = 0.1 \qquad p(X=1, Y=2) = a \qquad p(X=1, Y=3) = 0.2$$
$$p(X=2, Y=1) = b \qquad p(X=2, Y=2) = 0.1 \qquad p(X=2, Y=3) = 0.3$$

for konstanter $a, b \geq 0$. Vi antar at $p(X=x, Y=y) = 0$ for alle andre verdier av x og y.

(a) Forklar hvorfor $b = 0.3 - a$, og finn uttrykk for $E(X)$ og $E(Y)$ som funksjoner av a.
(b) Regn ut $\mathrm{Cov}(X,Y)$. For hvilken verdi av a er kovariansen minst mulig?
(c) Er X og Y uavhengige for noen verdier av a?

Oppgave 3.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 3 & t & 2 \\ 4 & 2t+4 & 0 \\ 1 & t+1 & 1 \end{pmatrix}$$

for en konstant t.

(a) Regn ut $\det(A)$. Er de tre kolonnevektorene i A lineært uavhengige?
(b) Finn alle egenverdiene til A når $t = -2$.

Oppgave 4.

Vi betrakter den kvadratiske formen Q gitt ved

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_3x_4 + 4x_4^2$$

(a) Regn ut vektoren $\partial Q/\partial \mathbf{x}$ av første ordens partielle deriverte til den kvadratiske formen Q, og finn alle stasjonære punkter for Q.
(b) Avgjør om Q er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit.

Oppgave 5.

Finn løsningen $y = y(t)$ av følgende differensiallikninger med initialbetingelse:

(a) $yy' = 1, \quad y(5) = -3$
(b) $y' - ty = t, \quad y(0) = 2$
(c) $y'' = y + 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

Oppgave 6.

Vi betrakter det diskonterte variasjonsproblemet

$$\min \int_0^8 \left(3\dot{y}^2 + (y - \dot{y})^2\right) e^{-\rho t}\, \mathrm{d}t \quad \text{når} \quad y(0) = 0,\ y(2) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

der diskonteringsrenten $\rho \geq 0$ er en konstant.

(a) Avgjør om $F = \left(3\dot{y}^2 + (y - \dot{y})^2\right) e^{-\rho t}$ er konveks eller konkav som en funksjon av $(y, \dot{y})$.
(b) Løs variasjonsproblemet for $\rho = 0$.