BI HANDELSHØYSKOLEN

Sensorveiledning:	**ELE 37191**	**Matematikk valgfag**	
Eksamensdato:	14.06.2012	09:00 – 14:00	Totalt antall sider: 4
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler inkludert BI-definert eksamenskalkulator		
	TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus		
Innføringsark:	Ruter		
	Teller 100% av ELE 3719		Deloppgavene er vektet likt
			Ansvarlig institutt: Samfunnsøkonomi

Oppgave 1.

(a) Vi regner først ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon, og får at

$$f_X(x) = \int_0^1 2x^2 + k(x-y)^2 \, \mathrm{d}y = \left[2x^2 y + \frac{k}{3}(x-y)^3(-1) \right]_0^1 = 2x^2 + \frac{k}{3}(x^3 - (x-1)^3)$$

Siden $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, så får vi at $f_X(x) = 2x^2 + k(x^2 - x + 1/3)$. Men f er en sannsynlighetstetthet, så vi har at

$$\int_0^1 2x^2 + k(x^2 - x + 1/3) \, \mathrm{d}x = \left[2x^3/3 + k(x^3/3 - x^2/2 + x/3) \right]_0^1 = 2/3 + k/6 = 1$$

Dette gir $\mathbf{k = 2}$. Dermed følger det at $f_X(x) = \mathbf{4x^2 - 2x + 2/3}$.

(b) Vi bruker $f_X(x) = 4x^2 - 2x + 2/3$ og finner $E(X)$ ved å løse integralet

$$E(X) = \int_0^1 x(4x^2 - 2x + 2/3) \, \mathrm{d}x = \left[x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 \right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$ ved å løse integralet

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(4x^2 - 2x + 2/3) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{9}x^3 \right]_0^1 = \frac{47}{90}$$

Dermed blir

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{47}{90} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \mathbf{\frac{7}{90}}$$

(c) Vi bruker $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$, og regner ut $E[XY]$ ved å løse integralet

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (4x^2 - 4xy + 2y^2) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 (4x^3 y - 4x^2 y^2 + 2xy^3) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[2x^3 y^2 - \frac{4}{3}x^2 y^3 + \frac{1}{2}xy^4 \right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = \mathbf{\frac{11}{36}}
\end{aligned}$$

(d) Vi regner ut den kumulative fordelingen $F(a,b) = P(X \le a, Y \le b)$ for $0 \le a \le 1$ og $0 \le b \le 1$ ved å regne ut integralet

$$\begin{aligned} P(X \le a, Y \le b) &= \int_0^a \int_0^b 4x^2 - 4xy + 2y^2 \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \left[4x^2 y - 2xy^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^b \mathrm{d}x = \int_0^a 4x^2 b - 2xb^2 + \frac{2}{3} b^3 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{4}{3} x^3 b - x^2 b^2 + \frac{2}{3} x b^3 \right]_0^a = \mathbf{\frac{4}{3} a^3 b - a^2 b^2 + \frac{2}{3} a b^3} \end{aligned}$$

Vi har at $F(1,1) = 4/3 - 1 + 2/3 = \mathbf{1}$.

Oppgave 2.

(a) Siden summen av sannsynlighetene er 1, har vi at

$$0.1 + a + 0.2 + b + 0.1 + 0.3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 0.3 - a}$$

Vi bruker derfor at $b = 0.3 - a$ i resten av oppgaven. Forventningsverdiene er gitt ved

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot (0.1 + a + 0.2) + 2 \cdot (b + 0.1 + 0.3) = a + 2b + 1.1 = \mathbf{1.7 - a} \\ E(Y) &= 1 \cdot (0.1 + b) + 2 \cdot (a + 0.1) + 3 \cdot 0.50 = 2a + b + 1.80 = \mathbf{a + 2.1} \end{aligned}$$

(b) Vi har at $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, og vi regner ut forventningsverdien

$$E(XY) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot (a + b) + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.3 = 2a + 2b + 2.9 = 3.5$$

Dette gir kovarians $\mathrm{Cov}(X,Y) = 3.5 - (1.7 - a)(a + 2.1) = \mathbf{a^2 + 0.4a - 0.07}$. Siden $0 \le a \le 0.3$, så har vi at variansen er minst mulig for $\mathbf{a = 0}$; i så fall er $\mathrm{Cov}(X,Y) = -0.07$.

(c) Hvis X og Y er uavhengige, så er $p(X = x) \cdot p(Y = y) = p(X = x, Y = y)$ for alle verdier av x og y. La oss anta at dette er tilfelle. Vi har $p(X = 1) = 0.3 + a$ og $p(Y = 3) = 0.5$, og dermed

$$p(X = 1) \cdot p(Y = 3) = p(X = 1, Y = 3) \quad \Rightarrow \quad (0.3 + a) \cdot 0.5 = 0.2$$

Dette gir $a = 0.1$ og dermed $b = 0.2$. På den andre siden er $p(Y = 1) = 0.1 + b = 0.3$, og dermed er

$$p(X = 1) \cdot p(Y = 1) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12 \neq 0.1 = p(X = 1, Y = 1)$$

Dette betyr at X og Y **ikke er uavhengige** for noen verdier av a.

Oppgave 3.

(a) Vi regner ut $\det(A)$ ved å utvikle determinanten langs tredje kolonne:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & t & 2 \\ 4 & 2t + 4 & 0 \\ 1 & t + 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4(t + 1) - 1(2t + 4)) + 1 \cdot (3(2t + 4) - 4(t)) = \mathbf{6t + 12}$$

Vi ser kolonnevektorene er lineært uavhengige for $\mathbf{t \neq -2}$ og lineært avhengige for $t = -2$, siden $|A| = 0$ hvis og bare hvis $t = -2$.

(b) Vi finner egenverdiene til A når $t = -2$ ved å løse den karakteristiske likningen

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 2 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 2(-4 + \lambda) + (1 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 8) = 0$$

Denne likningen kan skrives som $2\lambda - 8 + (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 8) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda = 0$, og dette gir $\lambda = 0$ eller $\lambda^2 - 4\lambda + 9 = 0$. Egenverdiene til A når $t = -2$ er gitt ved $\lambda = \mathbf{0}$, siden $\lambda^2 - 4\lambda + 9 = 0$ ikke har noen løsning.

Oppgave 4.

(a) Vektoren $\partial Q/\partial \mathbf{x}$ av første ordens partielle deriverte til Q er gitt ved $2A\mathbf{x}$, hvor A er den symmetriske matrisen til Q. Vi finner at A og den deriverte vektoren er gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

De stasjonære punktene til Q er gitt ved $2A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og den eneste løsningen av denne likningen er $\mathbf{x} = 1/2(A^{-1}\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ siden vi har

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3)(7\cdot 4 - (-1)^2) - 1\cdot 1(7\cdot 4 - (-1)^2) = 54 \neq 0$$

De stasjonære punktene for Q er derfor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Vi avgjør om Q er positiv (semi)definit, negativ (semi)definit eller indefinit ved å se på fortegnene til egenverdiene til A. Den karakteristiske likningen er gitt ved

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 4\lambda + 2)(\lambda^2 - 11\lambda + 27) = 0$$

og egenverdiene er derfor gitt ved $\lambda^2+4\lambda+2 = 0$, som gir $\lambda = -2\pm\sqrt{2} < 0$, og $\lambda^2-11\lambda+27 = 0$, som gir $\lambda = 11/2 \pm \sqrt{13}/2 > 0$. Siden A har to positive og to negative egenverdier, så er Q **indefinit**.

Oppgave 5.

(a) Differensiallikningen $yy' = 1$ er separabel, og vi har

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = t + \mathcal{C}$$

Dette gir $y^2 = 2t + 2\mathcal{C}$, og initialbetingelsen $y(5) = -3$ gir $9 = 10 + 2\mathcal{C}$, eller $2\mathcal{C} = -1$. Dermed har vi løsningen

$$y = -\sqrt{\mathbf{2t - 1}}$$

(b) Differensiallikningen $y' - ty = t$ er lineær, med integrerende faktor $u = e^{-t^2/2}$ siden vi har at $\int -t\,\mathrm{d}t = -t^2/2 + \mathcal{C}$. Dette gir

$$(ye^{-t^2/2})' = te^{-t^2/2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{t^2/2}\int te^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = e^{t^2/2}(\mathcal{C} - e^{-t^2/2}) = \mathcal{C}e^{t^2/2} - 1$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2$ gir $2 = \mathcal{C}e^0 - 1$, som gir $\mathcal{C} = 3$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{3e^{t^2/2} - 1}$$

(c) Differensiallikningen $y'' = y + 2$ er andre ordens lineær, og kan skrives $y'' - y = 2$. Den har løsning $y = y_h + y_p$, og vi har karakteristisk liking $r^2 - 1 = 0$, med løsning $r = \pm 1$, så den homogene løsningen er $y_h = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Den inhomogene likningen har den konstante løsningen $y = -2$, så den generelle løsningen er

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - 2$$

Initialbetingelsene $y(0) = 0, y'(0) = 0$ gir $C_1 + C_2 - 2 = 0$ og $C_1 - C_2 = 0$, som har løsning $C_1 = C_2 = 1$. Dermed er løsningen

$$y = \mathbf{e^t + e^{-t} - 2}$$

Oppgave 6.

(a) Vi bruker $F(t, y, \dot{y}) = \left(3\dot{y}^2 + (y - \dot{y})^2\right) e^{-\rho t}$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 2(y - \dot{y})e^{-\rho t}, \quad F'_{\dot{y}} = (6\dot{y} + 2(y - \dot{y})(-1))e^{-\rho t} = (8\dot{y} - 2y)e^{-\rho t}$$

Dette gir $A = F''_{yy} = 2e^{-\rho t}$, $B = F''_{y\dot{y}} = -2e^{-\rho t}$ og $C = F''_{\dot{y}\dot{y}} = 8e^{-\rho t}$. Dermed er $A, C > 0$ og $AC - B^2 = (16 - 4)e^{-2\rho t} = 12e^{-2\rho t} > 0$. Derfor er F **konveks** men **ikke konkav** som funksjon i $(y, \dot{y})$.

(b) Vi bruker $F(t, y, \dot{y}) = 3\dot{y}^2 + (y - \dot{y})^2$ og regner ut de partiell-deriverte:

$$F'_y = 2(y - \dot{y}), \quad F'_{\dot{y}} = 6\dot{y} + 2(y - \dot{y})(-1) = 8\dot{y} - 2y$$

Euler-likningen blir da:

$$F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} = 2(y - \dot{y}) - (8\ddot{y} - 2\dot{y}) = 0$$

Forenkling gir likningen $-8\ddot{y} + 2y = 0$, som er en andreordens lineær homogen differensiallikning med karakteristisk likning $r^2 - 1/4 = 0$, og karakteristiske røtter $r = \pm 1/2$. Dermed er løsningen av Euler-likningen $y = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-t/2}$. Initialbetingelsene $y(0) = 0,\ y(2) = (e^2 - e^{-2})/2$ gir $C_1 + C_2 = 0$ og $C_1 e + C_2 e^{-1} = (e^2 - e^{-2})/2$, med løsning $C_2 = -C_1$ og

$$C_1(e - e^{-1}) = (e^2 - e^{-2})/2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2(e - e^{-1})} = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$$

Vi får dermed løsningen

$$y = \mathbf{\frac{1}{2}(e + e^{-1})(e^{t/2} - e^{-t/2})}$$

av Euler-likningen og initialbetingelsene. Siden F er konveks som en funksjon av $(y, \dot{y})$, så er dette løsningen av minimumsproblemet.