BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

Skriftlig eksamen i: ELE 37191 Matematikk valgfag

Eksamensdato:	16.06.2011, 09:00 – 14:00
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™
Innføringsark:	Ruter
Totalt antall sider:	2

Oppgave 1.

Vi betrakter vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ og matrisen T gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

(a) For hvilke verdier av h er vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige?
(b) Er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengige når $h = 2$?

Oppgave 2.

Vi betrakter matrisen A gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi for A, og finn alle egenvektorer for A med egenverdi $\lambda = 3$.
(b) Regn ut den symmetriske matrisen $B = A^T A$. Vis at B er invertibel, og regn ut B^{-1}.
(c) Finn alle stasjonære punkter til funksjonen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 & 26 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 7$.
(d) Vis at $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ er en positiv definit kvadratisk form uten å regne ut egenverdiene til B.

Oppgave 3.

Løs følgende initialverdiproblemer:

(a) $y'' + 3y' - 28y = 14, \ y(0) = 2, \ y'(0) = -1.$
(b) $y' + 2e^t y = e^t, \ y(0) = 1.$
(c) $ty' = 1 + t + y + ty, \ y(1) = 1.$

Oppgave 4.

Vi ønsker å plante trær for å dekke et område på 30 kvadratkilometer i løpet av 4 år. La $y(t)$ være antall kvadratkilometer som er dekket etter t år, og la $\dot{y}(t)$ være plantehastigheten, målt i kvadratkilometer per år. Vi antar at kostnadsraten, målt i kr per år, er $C(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2$, der K er en positiv konstant. Den totale neddiskonterte kostnaden er da

$$\int_0^4 C(t, y, \dot{y}) e^{-rt} \, \mathrm{d}t$$

der r er diskonteringsrenten.

(a) Vi ønsker å minimere den totale neddiskonterte kostnaden. Sett opp variasjonsproblemet dette leder til. Vil en løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene til variasjonsproblemet minimere den totale neddiskonterte kostnaden?

(b) Løs variasjonsproblemet. Hva blir den totale neddiskonterte kostnaden om diskonteringsrenten $r = 0.08$ og konstanten $K = 10.000$?

Oppgave 5.

La X være antall mål til hjemmelaget og Y være antall mål til bortelaget i løpet av en fotballkamp. Vi antar at X og Y er uavhengige stokastiske variable, at X er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_X = 2$, og at Y er Poisson-fordelt med parameter $\lambda_Y = 1$.

(a) Finn $P(X = x, Y = y)$, og regn ut sannsynligheten for hvert av resultatene 0-0, 1-0 og 2-1.

(b) Regn ut sannsynligheten $P(X = Y, X \leq 4)$. Gi en tolkning av denne sannsynligheten.

(c) Regn ut den betingede sannsynligheten $P(X = Y | X \leq 4)$.

(d) Finn sannsynligheten $P(X + Y \geq 2)$. Du vil tilby et veddemål der spilleren vinner d ganger innsatsen hvis det blir minst 2 mål, og taper innsatsen om det blir færre enn 2 mål. Hvor stor bør d være om veddemålet skal lønne seg for deg?

Oppgave 6.

La X og Y være simultant fordelte stokastiske variable, med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy(x^2 + y^2) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(a) Finn $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$, og sjekk at $f(x, y)$ er en sannsynlighetstetthet.

(b) Regn ut $E[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.

(c) Vis at $E[Y^n] = E[X^n]$ for $n \geq 1$, og bruk dette til å finne $E[Y]$ og $\mathrm{Var}[Y]$.

(d) Regn ut $E[XY]$ og $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(e) Regn ut $P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2)$.