BI HANDELSHØYSKOLEN

Institutt for Samfunnsøkonomi

---

| | |
|---|---|
| **Løsninger i:** | **ELE 37191 Matematikk valgfag** |
| Dato: | 16.06.2011, 09:00 – 14:00 |
| Tillatte hjelpemidler: | Alle hjelpemidler + Eksamenskalkulator: TEXAS INSTRUMENTS BA II Plus™ |
| Innføringsark: | Ruter |
| Totalt antall sider: | 5 |

---

## Oppgave 1.

(a) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det(T) \neq 0$. Vi regner ut

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & h \\ h & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = 1 \cdot (2h - 1) - h \cdot (3h - h) + 1 \cdot (3 - 2h) = -2h^2 + 2$$

Dermed er vektorene lineært avhengige når $-2h^2 + 2 = 0$, det vil si når $h = \pm 1$, og vektorene er lineært uavhengige når $\underline{\underline{h \neq \pm 1}}$.

(b) Vi ser på matrisen med vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ som kolonner:

$$\begin{pmatrix} T\mathbf{v}_1 & T\mathbf{v}_2 & T\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = T \cdot T = T^2$$

Når $h = 2$ har denne matrisen determinant

$$\det(T^2) = \det(T)^2 = (-2h^2 + 2)^2 = 36 \neq 0$$

Dermed er vektorene $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, T\mathbf{v}_3\}$ $\underline{\underline{\text{lineært uavhengige}}}$ når $h = 2$.

## Oppgave 2.

(a) Den karakterstiske likningen til $A$ er gitt ved

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

Dermed er egenverdiene til $A$ gitt ved $\lambda = 3$, $\lambda = 6$, og dette viser at $\underline{\underline{\lambda = 3 \text{ er en egenverdi}}}$. Alternativt kan man vise at $\lambda = 3$ er en egenverdi ved å sjekke at $\det(A - 3I) = 0$. Vi regner ut egenvektorene til $A$ med egenverdi $\lambda = 3$ ved å løse likningssystemet

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at at andre likning er irrelevant og kan tas bort, og at tredje likning er første likning multiplisert med $-1$, og dermed også irrelevant. Derfor kan vi velge $y = s$ og $z = t$ som frie parametre, og når vi løser første likning for $x$ får vi

$$2x = -y + z \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$$

Vi får dermed at egenvektorene for $\lambda = 3$ kan skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} s + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t}}$$

(b) Vi har at

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 29 & 7 & -13 \\ 7 & 11 & -5 \\ -13 & -5 & 17 \end{pmatrix}}}$$

Siden

$$\det(B) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 = 54^2 = 2916 \neq 0$$

så følger det at $B$ er $\underline{\underline{\text{invertibel}}}$. Videre har vi

$$B^{-1} = (A^T A)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T$$

Vi regner ut $A^{-1}$ ved hjelp av den adjungerte matrisen:

$$A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$B^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 18 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -3 & 18 & 3 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{54}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Alternativt kunne vi beregnet $\det(B)$ og $B^{-1}$ direkte, uten å gå veien om $A$.

(c) Vi har at de stasjonære punktene for $f$ er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2B\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}B^{-1}\begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

siden $B$ er invertibel.

(d) Når vi setter $y = A\mathbf{x}$, så har vi

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} \geq 0$$

siden $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq 0$. Dermed er den kvadratiske formen positiv semidefinit. Siden $\det(B) = 54^2 \neq 0$, så er ingen av egenverdiene til $B$ null, og dermed er den kvadratiske formen til $B$ også $\underline{\underline{\text{positiv definit}}}$.

## Oppgave 3.

(a) Differensiallikningen $y'' + 3y' - 28y = 14$ er lineær av andre orden, og har løsning $y = y_h + y_p$. Vi finner først $y_h$ ved å løse den homogene likningen $y'' + 3y' - 28y = 0$. Den karakteristiske likningen er

$$r^2 + 3r - 28 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 4, -7$$

Dette gir $y_h = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t}$. Vi finner så en partikulær løsning på formen $y_p = A$ med $A$ konstant, som gir

$$-28A = 14 \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

Dermed er den generelle løsningen gitt ved $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-7t} - 1/2$. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$, og det gir

$$C_1 + C_2 - 1/2 = 2,\ 4C_1 - 7C_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = 1$$

Dermed er løsningen $\underline{\underline{y = \frac{3}{2}e^{4t} + e^{-7t} - \frac{1}{2}}}$.

(b) Differensiallikningen $y' + 2e^t y = e^t$ er lineær, og vi finner integrerende faktor $u$:

$$\int 2e^t \, \mathrm{d}t = 2e^t + C \quad \Rightarrow \quad u = e^{2e^t}$$

Vi multipliserer differensiallikningen med integrerende faktor $u$ og får

$$y' + 2e^t y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad \left(ye^{2e^t}\right)' = e^t e^{2e^t}$$

Integrasjon og divisjon med $u$ gir generell løsning

$$ye^{2e^t} = \int e^t e^{2e^t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2e^t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} + Ce^{-2e^t}$$

Vi setter inn initialbetingelsen $y(0) = 1$, og dette gir

$$1 = \frac{1}{2} + Ce^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}e^2$$

Dermed blir løsningen $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}(1 + e^{2-2e^t})}}$.

(c) Differensiallikningen $ty' = 1 + t + y + ty = (1+t)(1+y)$ er separabel, og den separerte formen av likningen blir

$$\frac{1}{1+y}\, y' = \frac{1+t}{t} = \frac{1}{t} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+y}\, \mathrm{d}y = \left(\frac{1}{t} + 1\right) \mathrm{d}t$$

Integrasjon gir dermed

$$\int \frac{1}{1+y} \, \mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{t} + 1\right) \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \ln|1+y| = \ln|t| + t + C$$

Vi løser for $y$ og får

$$1 + y = \pm e^{\ln|t| + t + C} = Kte^t \quad \Leftrightarrow \quad y = Kte^t - 1$$

der $K = \pm e^C$. Vi setter inn for initialbetingelsen $y(1) = 1$, som gir $1 = Ke - 1$ og dermed $K = 2/e$. Løsningen er derfor $\underline{\underline{y = 2te^{t-1} - 1}}$.

## Oppgave 4.

(a) Variasjonsproblemet blir

$$\underline{\underline{\min \int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt} \, \mathrm{d}t, \quad y(0) = 0, \; y(4) = 30}}$$

der $r$ og $K$ er positive konstanter, med $F(t, y, \dot{y}) = K\dot{y}^2 e^{-rt}$. Vi undersøker om $F$ er konveks funksjon i $(y, \dot{y})$: Vi har $F'_y = 0$ og $F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt}$, og dermed får vi

$$F''_{yy} = F''_{y\dot{y}} = 0, \quad F''_{\dot{y}\dot{y}} = 2Ke^{-rt} > 0 \quad \Rightarrow \quad F''_{yy}F''_{\dot{y}\dot{y}} - (F''_{y\dot{y}})^2 = 0$$

Dette betyr at $F$ er konveks som funksjon i $(y, \dot{y})$, og derfor er enhver løsning $y^*(t)$ av Euler-likningen og initialbetingelsene en løsning av variasjonsproblemet.

(b) Vi finner Euler-likningen ved å regne ut

$$F'_y = 0, \quad F'_{\dot{y}} = 2K\dot{y}e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F'_{\dot{y}} = 2K\ddot{y}e^{-rt} + 2K\dot{y}e^{-rt}(-r) = 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y})$$

Dermed er Euler-likningen gitt ved

$$0 - 2Ke^{-rt}(\ddot{y} - r\dot{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - r\dot{y} = 0$$

Vi får at $y = Ae^{rt} + B$ siden Euler-likningen er en homogen andre ordens lineær differensial-likning. Vi setter inn initialbetingelsene $y(0) = 0, \; y(4) = 30$, og dette gir

$$A + B = 0, \; Ae^{4r} + B = 30 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{30}{e^{4r} - 1}, B = -\frac{30}{e^{4r} - 1}$$

Løsningen av Euler-likningen og initialbetingelsene er dermed

$$\underline{\underline{y^* = \frac{30}{e^{4r} - 1}\left(e^{rt} - 1\right)}}$$

Den totale neddiskonterte kostnaden når $y = y^*(t)$ blir

$$\int_0^4 K\dot{y}^2 e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \int_0^4 K\left(\frac{30re^{rt}}{e^{4r}-1}\right)^2 e^{-rt}\,\mathrm{d}t = \frac{900Kr^2}{(e^{4r}-1)^2}\left[\frac{e^{rt}}{r}\right]_0^4 = \frac{900Kr}{e^{4r}-1}$$

Når $r = 0.08$ og $K = 10.000$, blir den totale neddiskonterte kostnaden $\frac{900Kr}{e^{4r}-1} \simeq \underline{\underline{1.909.167}}$.

## Oppgave 5.

(a) Vi har at $P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)$ siden $X$ og $Y$ er uavhengige, så

$$P(X = x, Y = y) = e^{-2}\,\frac{2^x}{x!} \cdot e^{-1}\,\frac{1^y}{y!} = \underline{\underline{e^{-3}\,\frac{2^x}{x!y!}}}$$

Innsetting gir $P(0-0) = e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0498}}$, $P(1-0) = 2e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0996}}$, $P(2-1) = 2e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.0996}}$.

(b) Vi har at $P(X = Y, X \leq 4) = P(0-0) + \cdots + P(4-4)$, så

$$P(X = Y, X \leq 4) = e^{-3}(1 + 2 + 1 + 2/9 + 1/36) = 4.25e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.2116}}$$

Dette er sannsynligheten for et uavgjort resultat med maksimalt fire mål til hjemmelaget.

(c) Vi har $P(X = Y | X \leq 4) = P(X = Y, X \leq 4)/P(X \leq 4)$. Siden

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 4) = e^{-2}(1 + 2 + 2 + 4/3 + 2/3) = 7e^{-2}$$

så får vi

$$P(X = Y | X \leq 4) = \frac{4.25e^{-3}}{7e^{-2}} \simeq \underline{\underline{0.2234}}$$

(d) Vi har $P(X + Y \geq 2) = 1 - P(X + Y < 2)$ og

$$P(X + Y < 2) = P(0-0) + P(1-0) + P(0-1) = 4e^{-3}$$

så $P(X + Y \geq 2) = 1 - 4e^{-3} \simeq \underline{\underline{0.8009}}$. La $Z$ være netto utbetaling i veddemålet. Da har vi

$$Z = \begin{cases} dI - I & X + Y \geq 2 \\ -I & X + Y < 2 \end{cases}$$

der $I$ er innsatsen. Setter vi $p = P(X+Y \geq 2) \simeq 0.8009$, finner vi at forventet netto utbetaling blir

$$E[Z] = (dI - I)p + (-I)(1-p) = dIp - I = I(dp - 1)$$

Veddemålet gir forventet netto innbetaling om $E[Z] < 0$, dvs $dp - 1 < 0$ eller $d < 1/p \simeq 1.2487$. Altså lønner det seg å tilby veddemålet om $\underline{\underline{d < 1.2487}}$.

## Oppgave 6.

(a) Vi regner ut $f_X(x)$ når $0 \leq x \leq 1$ ved integrasjon:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \left[x(x^2 + y^2)^2\right]_0^1 = x(x^2 + 1)^2 - x^5 = \underline{\underline{2x^3 + x}}$$

Vi har $f(x, y) \geq 0$ for alle $x, y$, og regner ut

$$\int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

Dermed følger det at $f(x, y)$ er en sannsynlighetstetthet.

(b) Vi regner ut $E[X]$:

$$E[X] = \int_0^1 x(2x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}$$

For å finne $\mathrm{Var}[X]$ regner vi først ut $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(2x^3 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Dermed er

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{41}{900}}}$$

(c) Siden $f(a,b) = f(b,a)$ for alle reelle tall $a, b$ (symmetri om linjen $y = x$), så kan vi bytte om rollene til $x$ og $y$ uten at integralet endrer verdi:

$$E[X^n] = \int\int x^n f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\int y^n f(y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int y^n f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = E[Y^n]$$

Dermed er $E[X^n] = E[Y^n]$ for alle $n \geq 1$. Da har vi

$$E[Y] = E[X] = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}, \quad \mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{Var}[X] = \underline{\underline{\frac{41}{900}}}$$

(d) Vi regner ut $E[XY]$ ved integrasjon:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 (4x^4y^2 + 4x^2y^4)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 4x^4 \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 + 4x^2 \left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{5}x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{15}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{8}{15}}} \end{aligned}$$

Dette gir $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{15} - \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{225}}}$.

(e) Vi har at

$$\begin{aligned} P(X \geq 1/2, Y \geq 1/2) &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 4xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 (4x^3y + 4xy^3)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^1 4x^3 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{1/2}^1 + 4x \left[\frac{1}{4}y^4\right]_{1/2}^1 \mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{15}{16}x\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{32}x^2\right]_{1/2}^1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{15}{16} + \frac{15}{32} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{45}{64}}} \end{aligned}$$